

Publikacija IKPIR št. 13

3. izdaja

Peter Fajfar

E A V E K

Program za elastično analizo
večetažnih konstrukcij

Ljubljana, februar 1987

Izdala in založila
Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo,
VTOZD Gradbeništvo in geodezija

Avtor:
dr. Peter Fajfar, redni profesor

Tisk in vezava:
Partizanska knjiga, Ljubljana,
200 izvodov

Ljubljana, februar 1987

Publikacija po mnenju Republiškega komiteja za kulturo,
štev. 4210-93/86 z dne 23. 6. 1986 šteje med proizvode, za
katere se ne plačuje temeljni in posebni davek od prometa
proizvodov.

PREDGOVOR K 3. IZDAJI

Kljub temu, da EAVEK temelji na teoriji, katere večji del je bil izdelan leta 1971, je program danes še vedno zelo aktualen, saj uporabljeni računski model velja v svetu in pri nas še vedno kot najbolj primeren za račun običajnih stavb. V času od leta 1981 dalje, ko je izšla druga izdaja priročnika, se je uporaba EAVEK-a še razširila. Program še naprej teče na računalniku CYBER Republiškega računskega centra, izdelana pa je bila tudi verzija programa za računalnik DEC na Računalniškem centru Univerze v Ljubljani. Na obeh računalnikih program preko terminalov uporabljajo tisti člani kluba uporabnikov programske opreme IKPIR (KUPO), ki nimajo lastnih računalnikov. V zadnjih letih so se izredno razširili osebni računalniki velikih zmogljivosti. Tako se je pojavila potreba in možnost za predelavo programa na te računalnike. Pripravljena je bila verzija programa za IBM PC (in kompatibilne računalnike), ki odgovarja verziji programa z velikih računalnikov, z izjemo časovnega poteka odziva. Poleg navedenih verzij je bil program predelan še za uporabo na raznih drugih računalnikih posameznih delovnih organizacij. Vse predelave so izvršili sodelavci IKPIR-a, predvsem V. Marolt in A. Vitek.

Tretja izdaja publikacije je povsem enaka drugi izdaji in je izšla zato, ker je priročnik pošel. Verzije, ki tečejo na vseh računalnikih, so še vedno enake verziji 1.3 (razen na IBM PC). V pripravi je nova verzija programa, ki bo predvidoma izdelana konec leta 1988.

Ljubljana, februar 1987

avtor

PREDGOVOR K 2. IZDAJI

V letih 1976 do 1981 se je program EAVEK dokaj dobro uveljavil po vsej Sloveniji, pa tudi izven nje. Enostaven način priprave podatkov in pregleden izpis so omogočili, da je večje število uporabnikov prešlo na samostojne obdelave preko raznih terminalov, ki so priključeni na RRC v Ljubljani. Kljub temu, da je bila prva verzija programa dejansko izdelana že leta 1972 (program DAVEK), je program danes še vedno zelo aktualen, saj uporabljeni računski model konstrukcije še vedno velja tudi v svetovnem merilu kot edino primeren za račun običajnih zgradb.

V zadnjih letih smo program dopolnjevali, čeprav ne tako hitro in uspešno, kot bi želeli. Važno dopolnitev osnovne verzije je predstavljala verzija 1.1, ki je bila izdelana oktobra 1977 in kjer je bil uveden nov tip elementa, ki omogoča račun sten z več vrstami odprtin. Pri programiranju tega elementa so sodelovali poleg avtorja še Mladen Bratović, Matej Fischinger in Boris Iutar. Verzija 1.2, ki je bila izdelana januarja 1981 in ki je trenutno v uporabi, je prinesla nekaj manjših novosti, ki omogočajo predvsem lažje iskanje napak. Seveda so bile v vsaki novi verziji opravljene vse napake v programu, ki so bile odkrite tekom uporabe. Lahko se pohvalimo, da je bilo teh napak presenetljivo malo.

V pripravi je izdelava verzije 1.3, ki bo zajela tudi direkten račun po novih predpisih o gradnji na seizmičnih področjih. Druga izdaja priročnika se nanaša na to verzijo programa. Verzija 1.3 bo predvidoma izdelana v prvi polovici leta 1982, do tedaj pa je možno upoštevati nove predpise tako, da se zahteva metoda s spektri odziva, poda ustrezen spekter in nazadnje napravi korekcija rezultatov. Z uveljavitvijo novih predpisov bo bolj prišla do izraza tudi možnost prave dinamične analize, ki jo nudi program EAVEK, in ki se je do sedaj uporabljala največ le pri pedagoškem in raziskovalnem delu.

Trenutno ni mogoče uporabljati risanja na ploter. To risanje je namreč odvisno od aparature opreme, ki je na razpolago. Ker smo na FAGG zamenjali opremo za risanje, bi bilo treba program za risanje nekoliko preurediti. Glede na to, da do zdaj ni bilo velikih potreb po risanju rezultatov na ploter, smo preureditev programa za nekaj časa odložili.

Seveda pa je možno risanje na printer, ki pride v poštev predvsem pri računu časovnega poteka odziva.

V drugi izdaji publikacije so vključene dopolnitve v zvezi z verzijami 1.1, 1.2 in 1.3. Še vedno velja, tako kot pri vseh programih na svetu, opozorilo, da je treba rezultate skrbno preveriti in da ne avtor ne fakulteta ne prevzemata nobene odgovornosti za pravilnost rezultatov in za napake, ki bi nastale zaradi napačne uporabe programa.

Ljubljana, november 1981

Avtor

PREDGOVOR

Program EAVEK (Elastična Analiza VEčetažnih Konstrukcij) predstavlja nadaljevanje programa DAVEK, ki se že nekaj let uspešno uporablja pri projektiranju objektov v visokogradnji ter pri pedagoškem in raziskovalnem delu na FAGG.

Izkušnje pri uporabi aplikativnih programov so pokazale, da je priljubljenost programa bistveno odvisna od načina priprave podatkov in načina prikaza rezultatov. V novem programu smo se trudili, da bi se s pripravo podatkov in podajanjem rezultatov čim bolj približali inženirski praksi. Nadalje omogoča novi program v primerjavi s programom DAVEK uporabo vrste novih metod, kot npr. račun časovnega poteka odziva konstrukcije, račun elastične stabilnosti in upoštevanje teorije 2.reda.

Priprava podatkov za program EAVEK je zelo enostavna. Uporabljajo se običajni inženirski izrazi v angleščini, na kolone in vrstni red ukazov v splošnem ni treba paziti. Program sam pred računom pregleda podatke in javi morebitne nepravilnosti. Vseh napak program seveda ne more odkriti (npr. napačnih numeričnih podatkov), zato je potrebno rezultate programa vedno skrbno pregledati. Za pripravo podatkov je bila izbrana angleščina zaradi enotnosti z ostalimi programi (npr. STRESS, RAVOK) in zaradi prilagojenosti računalnikov angleški abecedi (šumnikov ni mogoče uporabljati, če enote računalnika niso posebej predelane). Formalno je priprava podatkov za program EAVEK različna od priprave za program DAVEK, vendar so principi ostali isti, zato je možno enostavno preiti na uporabo novega programa.

V publikaciji je poleg navodil za pripravo podatkov in primerov uporabe podan tudi tisti del teoretičnih osnov, ki je pomemben za razumevanje programa. Uporabnik, ki ne pozna osnovnih predpostavk in principov metode, na kateri program temelji, običajno ne more izkoristiti vseh možnosti, ki jih program nudi, večkrat pa lahko program celo napačno uporablja. Iz tega razloga toplo priporočam vsem uporabnikom, da vsaj prečitajo teoretični del publikacije, predvsem poglavje o računskem modelu konstrukcije. Teoretični del vsebuje večinoma samo opis predpostavk in končne enačbe ter predstavlja sintezo avtorjevih dosedanjih publikacij s področja analize konstrukcij v visokogradnji. Tisti, ki jih zanimajo izpeljave, jih bodo morali poiskati v navedeni literaturi. Večji del enačb je podan v matrični obliki, ki se je izkazala kot najbolj primerna tako za programiranje kot tudi za izpeljave in pisanje enačb.

Na tem mestu se želim zahvaliti vsem, ki so sodelovali pri izdelavi programa in pregledovanju rokopisa, predvsem pa Mateju Fischingerju, ki je programiral čitanje in testiranje podatkov ter risanje na ploter.

Program EAVEK je bil skrbno testiran, vendar avtor ne prevzame odgovornosti za pravilnost rezultatov.

Ljubljana, junij 1976

Avtor

TEORETIČNE OSNOVE PROGRAMA E A V E K

VSEBINA

1. UVOD	T - 1
2. OSNOVNA ENAČBA METODE	T - 3
3. RAČUNSKI MODEL KONSTRUKCIJE IN PREDPOSTAVKE	T - 5
4. ELEMENTI	T - 20
4.1 Togostne matrike elementov	T - 20
4.2 Podajnostne matrike elementov	T - 21
Stena brez odprtin	T - 22
Stena na stebrih	T - 23
Stena z odprtinami	T - 25
Stena z odprtinami (splošne enačbe)	T - 28
Ravninski okvir	T - 30
Torzijski elementi	T - 32
Nestandardni elementi	T - 36
4.3 Masne matrike elementov	T - 36
4.4 Geometrijske matrike elementov	T - 36
4.5 Elastična vpetost elementov	T - 37
5. MATRIKE KONSTRUKCIJE	T - 39
6. SISTEM ENAČB PRI SEIZMIČNI OBTEŽBI	T - 43
7. REŠEVANJE SISTEMOV ENAČB	T - 45
7.1 Reševanje sistemov nehomogenih algebraičnih enačb	T - 46
7.2 Reševanje sistemov homogenih algebraičnih enačb - določanje lastnih vrednosti	T - 46
7.3 Reševanje sistemov homogenih diferencialnih enačb	T - 48
7.4 Reševanje sistemov nehomogenih diferencialnih enačb ..	T - 49
7.5 Uporaba spektrov odziva	T - 52
8. DOLOČITEV NOTRANJIH SIL	T - 60
9. PRIBLIŽNE METODE	T - 62
10. LITERATURA	T - 64

1. U V O D

Analiza večetažnih objektov pri horizontalni obtežbi je eden tistih problemov, s katerim se statiki vsakodnevno srečujejo. Vse do pred kratkim so se za reševanje tega problema uporabljale razne približne metode, ki so pri enostavnih konstrukcijah dajale dokaj dobre rezultate, odpovedale pa so, čim je bila zgradba malo bolj komplicirana. Šele razvoj elektronskih računalnikov je omogočil uporabo novih metod, s katerimi je mogoče bolj natančno analizirati vse vrste konstrukcij, ki se običajno uporabljajo v visokogradnji.

Najbolj preprost način računa je statična analiza konstrukcije, ki se v skladu z veljavnimi jugoslovanskimi predpisi uporablja pri obtežbi z vetrom. Tak način računa predstavlja seveda precejšnjo poenostavitev problema, saj je dejansko obtežba z vetrom dinamična obtežba. Pred leti se je tudi potresna obtežba nadomestila z neko horizontalno statično obtežbo, vendar se je pokazalo, da ta način računa ni ustrezen, zato trenutno naši predpisi predpisujejo dinamično analizo z uporabo spektra odziva. Pri tej metodi je treba raziskati lastno nihanje konstrukcije in nato določiti nadomestno statično obtežbo, ki je odvisna od karakteristik lastnega nihanja. Natančnost te metode povsem zadošča za običajne konstrukcije. Za zelo pomembne objekte se danes uporablja prava dinamična analiza, kjer zasledujemo časovni potek odziva poljubnih statičnih količin.

Pri običajnih konstrukcijah so horizontalne deformacije sorazmerno majhne, zato lahko dodatne obremenitve, ki jih povzroča vertikalna obtežba na deformirani konstrukciji, zanemarimo. Pri vitkih konstrukcijah imajo lahko dodatni vplivi pomembno vlogo, zato je treba upoštevati teorijo 2. reda, tako pri statični, kot tudi pri dinamični analizi, včasih pa nas zanima tudi stabilnost konstrukcije kot celote.

Pri reševanju vseh navedenih problemov se lahko omejimo na teorijo elastičnosti, ali pa upoštevamo tudi plastifikacijo materiala. Z drugim načinom je možno natančneje opisati obnašanje konstrukcije, vendar so metode, ki to omogočajo, zaenkrat še tako komplicirane in drage, da se uporabljajo samo izjemoma. V naših izvajanjih se bomo omejili izključno na teorijo elastičnosti.

V literaturi je objavljena vrsta metod za reševanje statičnih, dinamičnih in stabilitetnih problemov v visokogradnji. Vse metode je v bistvu možno razdeliti na dve veliki skupini, na metode z zvezno računsko shemo in na metode z diskretno računsko shemo.

Metode z zvezno računsko shemo prevedejo problem na reševanje diferencialnih enačb. Splošna značilnost teh metod je, da zahtevajo sorazmerno malo računskega dela in večinoma ne potrebujejo elektronskih računalnikov, zato pa so manj uporabne pri bolj kompliciranih konstrukcijah, kjer se pojavijo kakršne koli nezveznosti, n. pr. spremembe tlorisa po višini zgradbe.

Veliko bolj splošne so metode z diskretno računsko shemo, ki prevedejo problem na reševanje sistema algebrائيh enačb. Najbolj splošna možnost bi bila uporaba metode končnih elementov, kjer bi celotno konstrukcijo razdelili na veliko število klasičnih končnih elementov (linijski elementi, trikotniki, pravokotniki, itd.). Zaenkrat je ta možnost samo teoretična, saj bi bili sistemi enačb preveliki. Za praktični račun je zato nujno potrebno uvesti določene poenostavitve, ki bistveno zmanjšajo računsko delo in omogočajo s tem ekonomično analizo. Seveda morajo biti vse poenostavitve take, da ne vplivajo bistveno na rezultate.

V tej publikaciji so opisane teoretične osnove metode za elastično analizo večetažnih konstrukcij (statična in dinamična analiza po teoriji 1. in 2. reda in račun elastične stabilnosti), ki jo uporablja program EAVEK (Elastična Analiza VEčetažnih Konstrukcij).

Metoda je v bistvu metoda končnih elementov, vendar so upoštevane poenostavitve, ki so tipične za objekte v visokogradnji. Teoretične osnove so podane v takem obsegu, kolikor je potrebno za razumevanje programa. Vse izpeljave in podrobnosti so podane v prejšnjih avtorjevih publikacijah ([3] do [6]).

Teoretičnim osnovam sledijo navodila za uporabo programa in primeri uporabe.

2. OSNOVNA ENAČBA METODE

Uporabljena je splošna enačba metode končnih elementov

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + ([K] - [G])\{U\} = \{P\} \quad , \quad \dots(2.1)$$

ki zajema statične in dinamične vplive po teoriji 1. in 2. reda. Vse matrike in vektorji v enačbi se nanašajo na globalni koordinatni sistem konstrukcije in sicer predstavlja

$\{U\}, \{\dot{U}\}, \{\ddot{U}\}$ vektorje neznanih premikov (z izrazom premiki označimo premike in zasuke), hitrosti in pospeškov

$\{P\}$ vektor zunanje obtežbe

$[M]$ masno matriko

$[C]$ matriko koeficientov dušenja

$[K]$ togostno matriko po teoriji 1. reda

$[G]$ geometrijsko matriko, ki zajema vpliv teorije 2. reda.

V delih [4] in [5] nastopata dve geometrijski matriki, vendar so izračuni dejanskih konstrukcij v visokogradnji pokazali, da ima geometrijska matrika, ki upošteva neposredni vpliv zunanje obtežbe, zelo majhen vpliv na rezultate in smo jo zato v programu zanemarili.

Način določanja posameznih matrik bo prikazan v naslednjih poglavjih.

Vse običajne metode pri analizi konstrukcij so opisane s posebnimi oblikami splošne enačbe, n. pr.:

statika, teorija 1. reda

$$[K] \{U\} = \{P\} \quad \dots(2.2)$$

statika, teorija 2. reda

$$([K] - [G])\{U\} = \{P\} \quad \dots(2.3)$$

dinamika, teorija 1. reda, brez dušenja

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{P\} \quad \dots(2.4)$$

dinamika, teorija 1. reda, z dušenjem

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{P\} \quad \dots(2.5)$$

dinamika, teorija 2. reda, brez dušenja

$$[M] \{\ddot{U}\} + ([K] - [G]) \{U\} = \{P\} \quad \dots(2.6)$$

Če ni zunanje obtežbe, je vektor $\{P\}$ enak nič in sistemi enačb postanejo homogeni. Uklonske sile lahko določimo s pomočjo enačbe

$$([K] - \lambda [G]) \{U\} = \{0\} \quad , \quad \dots(2.7)$$

ki sledi iz enačbe (3). λ predstavlja razmerje med kritično uklonsko obtežbo in tisto obtežbo, za katero je izračunana geometrijska matrika.

Homogeni del diferencialnih enačb (2.4) in (2.6) je možno prevesti na algebraične enačbe tako, da lastne frekvence in oblike lastnih nihanj računamo z enačbo

$$([K] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{0\} \quad , \quad \dots(2.8)$$

kjer je ω označena krožna frekvenca lastnega nihanja. Če želimo upoštevati pri lastnih nihanjih tudi vpliv teorije 2. reda, moramo uporabiti enačbo

$$([K] - [G] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{0\} \quad . \quad \dots(2.9)$$

Ta enačba služi tudi za račun dinamične stabilnosti, kjer iščemo kritično uklonsko obtežbo pri znani frekvenci nihanja. V ta namen pišemo enačbo (2.9) v obliki

$$([K] - \lambda [G] - \omega^2 [M]) \{U\} = \{0\} \quad . \quad \dots(2.10)$$

Program omogoča direktni račun po vseh metodah, ki so opisane z enačbami (2.1) do (2.9), račun dinamične stabilnosti pa v verziji 1 programa ni zajet.

Pri računu lastnih nihanj (enačbi (2.8) in (2.9)) ni upoštevan vpliv dušenja. Tako veljata enačbi točno za konstrukcije brez dušenja, dovolj natančno pa tudi za vse konstrukcije z majhnim dušenjem, kar je značilnost velike večine gradbenih konstrukcij.

Pri geometrijski matriki je predpostavljeno, da se ne spreminja s časom.

3. RAČUNSKI MODEL KONSTRUKCIJE IN PREDPOSTAVKE

Osnovna predpostavka je veljavnost teorije elastičnosti.

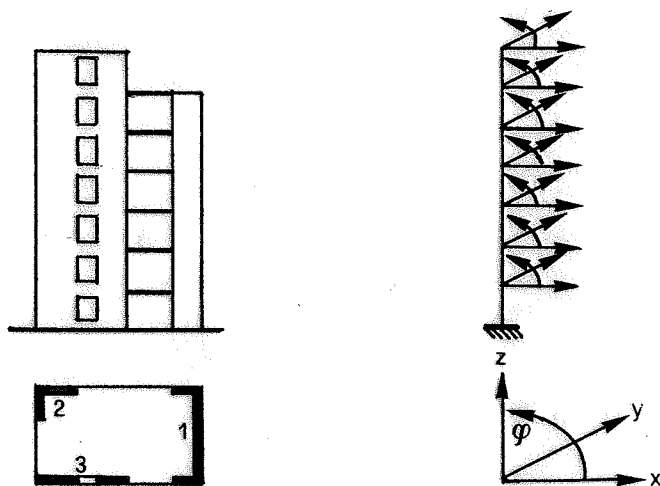
Ta predpostavka vsekakor ustreza pri manjših deformacijah, ki jih povzročajo običajne obtežbe, problematična pa je pri močnih potresnih obremenitvah, kjer mora pri pravilno zasnovanih konstrukcijah (razen izjem, n. pr. jedrski reaktorji) priti so plastičnih deformacij. Na žalost trenutno še ni izdelanih ekonomičnih in zanesljivih metod za upoštevanje plastifikacije pri kompliciranih konstrukcijah. Iz tega razloga se je treba zaenkrat tudi pri analizi močnih potresnih obremenitev zadovoljiti z elastičnimi rešitvami. Vpliv plastifikacije je možno vsaj delno upoštevati z zmanjšanjem spektra odziva ali s povečanjem koeficientov dušenja.

Predpostavka, da so premiki majhni, mora biti izpolnjena pri vseh konstrukcijah v visokogradnji. Ta predpostavka omogoča linearizacijo problema in direktno reševanje sistema enačb tudi pri uporabi teorije 2. reda.

Nadaljnje predpostavke se nanašajo na računski model zgradbe. Nosilno konstrukcijo objektov v visokogradnji sestavljajo običajno elementi, ki se raztezajo v vertikalni smeri objekta (stebri in stene) in elementi, ki se raztezajo v horizontalnih smereh (prečke in plošče). Upogibna togost plošče je normalno zelo majhna v primerjavi z upogibno togostjo stebrov in prečk ter upogibno togostjo sten v smeri njihove daljše tlorisne dimenzije. Po drugi strani so običajno tlorisne dimenzije medetažnih plošč take, da ne dopuščajo pomembnejših deformacij plošče v lastni ravnini. Iz teh razlogov uvedemo predpostavki, da so medetažne plošče neskončno toge v svoji ravnini in neskončno gibke pravokotno na to ravnino. Posledica prve predpostavke je ta, da so horizontalni premiki vseh točk na plošči popolnoma definirani, če poznamo premike ene točke. Glede na drugo predpostavko plošče prenašajo samo sile v svoji ravnini. Pri dveh vertikalnih elementih (n. pr. stenah), ki sta povezana samo s ploščami, po teh predpostavkah vplivajo samo horizontalni premiki (pomik v horizontalni ravnini in torzijski zasuk) prvega elementa na drugi element, medtem ko so vertikalni pomiki in upogibni zasuki obeh elementov neodvisni (odvisni so lahko samo posredno, saj so običajno povezani s horizontalnimi pomiki).

Nosilne elemente, ki se raztezajo v vertikalni smeri, združimo v tako imenovane makroelemente, ki predstavljajo del konstrukcije. Tak del konstrukcije večkrat imenujemo podkonstrukcijo. Če so stebri tega povezani s prečkami, imenujemo tak makroelement okvir, če so stene povezane s prečkami, imenujemo tak

makroelement stena z odprtinami. Bistveno za makroelement je, da je to del konstrukcije, ki sega od temeljev preko poljubnega števila etaž do vrha objekta oziroma do določene etaže in je z ostalimi makroelementi (deli konstrukcije) povezan samo z medetažnimi ploščami. Makroelement je lahko tudi ena sama stena. V najbolj enostavnem primeru lahko celotno konstrukcijo predstavlja en sam makroelement (n.pr. dimniki).



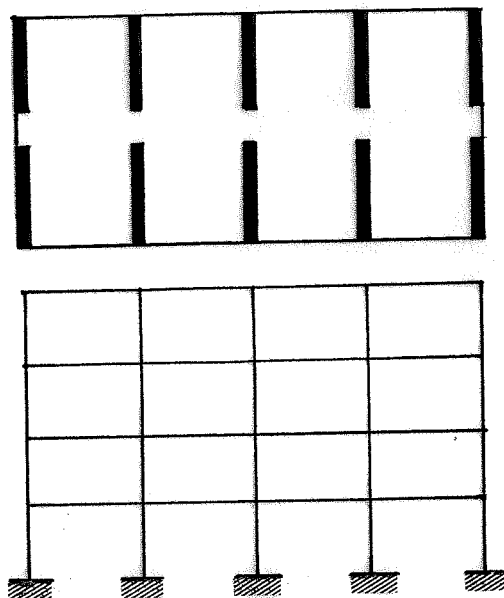
Slika 3.1. Razdelitev konstrukcije na makroelemente in prostostne stopnje

Opisana razdelitev konstrukcije je najbolj naravna razdelitev in jo statiki že dolgo uporabljajo. Pri tem so pogosto uporabljene še nadaljnje poenostavitve. Kot primer naj navedemo skupino stebrov in prečk, ki tvorijo prostorski okvir. Če bi se strogo držali definicije makroelementov, bi tak prostorski okvir morali obravnavati kot en makroelement. V praksi običajno prostorski okvir razbijemo na posamezne ravninske okvire, ki jih obrav-

navamo vsakega zase. Če je prostorski okvir simetričen in obtežba simetrična, potem je tak postopek točen, v nasprotnem primeru pa na ta način zanemarimo vpliv torzijske togosti prečk. Povsem analogno postopamo pri pripravi podatkov za program EAVEK. Pri opisanem poenostavljenem postopku tudi ne upoštevamo kompatibilnosti osnih deformacij v stebrih, ki so skupne dvema ali več ravninskim okvirom. Izkušnje kažejo, da pri večini konstrukcij ta napaka ne vpliva bistveno na rezultate.

Včasih se pojavi tudi primer, ko upogibne togosti ne smemo zanemariti, n.pr. če se pri gradnji s tunelskimi opaži vse stene raztezajo v eni smeri. V tem primeru moramo kot edini nosilni element pravokotno na stene uporabiti okvir, ki ga tvorijo stene in plošče (slika 3.2), praviloma pa se je potrebno takim zasnovam konstrukcije izogibati.

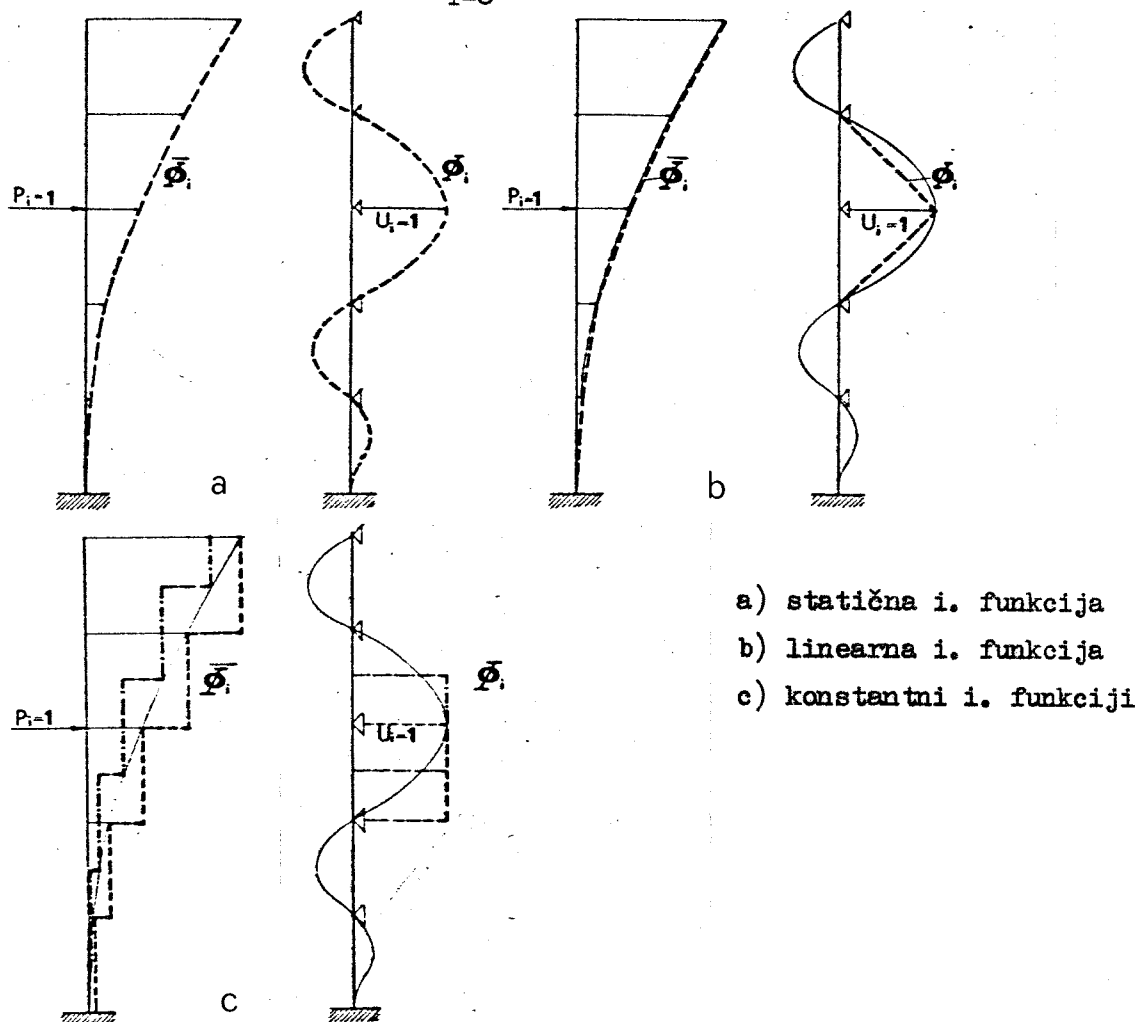
Število prostostnih stopenj neke konstrukcije je enako številu neodvisnih



Slika 3.2. Okvir, sestavljen iz sten in plošč.

vrednosti (posplošenih koordinat), s katerimi lahko popolnoma opišemo obliko konstrukcije v deformirani legi. Teoretično gledano je to število pri vsaki realni konstrukciji neskončno. Vsaka numerična metoda reševanja se mora omejiti na neko končno število prostostnih stopenj. Metoda končnih elementov n. pr. razdeli konstrukcijo na večje število elementov in izbere kot prostostne stopnje premike določenih točk (običajno so te točke vozlišča - vozliščne točke) elementa. Med temi izbranimi diskretnimi točkami je treba predpostaviti nek potek deformacij. Na podlagi izračunanih premikov diskretnih točk in predpostavljenega poteka deformacij med diskretnimi točkami je mogoče določiti premike poljubne točke. Rezultati so tem bolj točni, čimbolj natančno predpostavimo potek deformacij po elementu.

Tudi metoda, na kateri temelji program EAVEK, je v bistvu metoda končnih elementov, samo da se namesto klasičnih elementov uporabljajo makroelementi. Makroelementi segajo od temeljev preko poljubnega števila etaž in diskretne točke izberemo v višini medetažnih plošč. Vsaka takšna točka ima v prostoru 6 možnih premikov (tri translacije in tri rotacije), vendar kot prostostne stopnje vzamemo samo premike v horizontalni ravnini (2 translaciji in 1 rotacijo - slika 3.1). Glede na predpostavko, da plošče nimajo togosti pravokotno na svojo ravnino, se namreč prenašajo preko plošče med elementi le horizontalni premiki. Zveza med horizontalnimi premiki izbranih točk v višinah medetažnih plošč in premiki poljubne točke (potek deformacij po elementu - interpolacijske funkcije) je predpostavljena po statični teoriji 1. reda (slika 3.3).



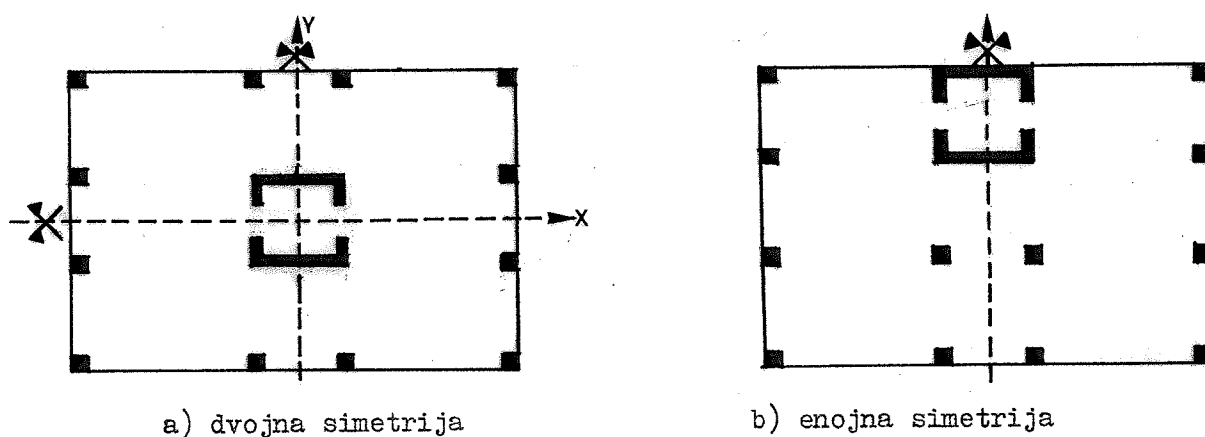
Slika 3.3. Interpolacijske funkcije.

Če torej izberemo statično metodo računa in upoštevamo teorijo 1. reda, bodo vsi rezultati "točni" (v okviru točnosti ostalih predpostavk), medtem ko bodo pri uporabi vseh ostalih metod rezultati le približni. Kot primer naj navedemo, da zaradi omejitve prostostnih stopenj ni možno upoštevati masnih (vztrajnostnih) sil, ki se pojavijo zaradi vertikalnih pomikov in zaradi upogibnih rotacij. Raziskave so pokazale, da te sile pri običajnih konstrukcijah, obteženih s horizontalno obtežbo, nimajo pomembnega vpliva in da tako naša omejitev prostostnih stopenj nima zaznavnega vpliva na rezultate. Na tem mestu naj omenimo, da imajo včasih lahko vertikalne vztrajnostne sile pomemben lokalni vpliv na konzolne dele konstrukcije pri vertikalnih premikih temeljnih tal. Tega vpliva s programom EAVEK ni mogoče zajeti.

Število prostostnih stopenj vsakega makroelementa v prostoru je odvisno od števila etaž, preko katerih se makroelement razteza in sicer je enako trikratnemu številu etaž. Kakšno je število prostostnih stopenj celotne konstrukcije, ki je sestavljena iz poljubnega števila makroelementov? Glede na predpostavko, da se medetažne plošče, ki povezujejo vse makroelemente, v svoji ravnini ne deformirajo, so horizontalni premiki vsakega elementa enolično določeni, če so znani horizontalni premiki enega elementa. Število prostostnih stopenj ce-

lotne konstrukcije je torej enako številu prostostnih stopenj najvišjega elementa, to je trikratnemu številu etaž konstrukcije.

Poseben primer predstavlja konstrukcija, ki je simetrična in simetrično obtežena. Tako konstrukcijo lahko obravnavamo ravninsko, saj obtežba v smeri simetrijske ravnine povzroči le pomike v smeri simetrijske ravnine, pomiki v drugi smeri in torzijski zasuki pa so enaki nič. Število prostostnih stopenj se zmanjša za faktor 3 in je enako številu etaž konstrukcije. Za ravninsko obravnavanje konstrukcije sta potrebni dve medsebojno pravokotni osi simetrije, saj le v tem primeru lahko neodvisno raziskujemo obnašanje konstrukcije v dveh pravokotnih smereh (slika 3.4 a).

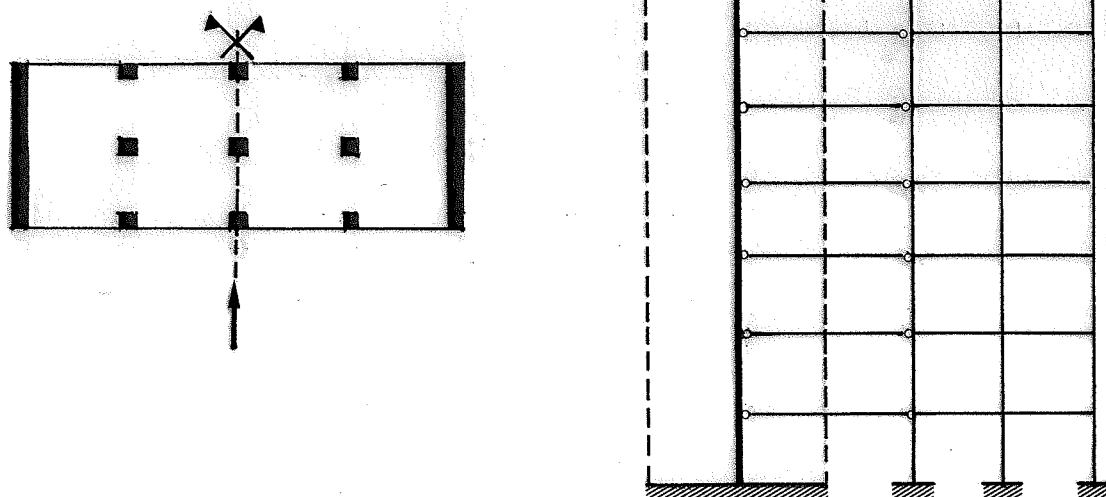


Slika 3.4. Simetrične konstrukcije

Če obstaja le ena os simetrije (slika 3.4 b), so medsebojno povezani pomiki v eni smeri in zasuki. Pri zasuku se aktivira torzijska nosilnost konstrukcije, k tej pa doprinašajo v splošnem tudi elementi, nosilni v smeri, ki je vzporedna z osjo simetrije (Y smer na sliki 3.4 b). Pri konstrukcijah z enoosno simetrijo bi lahko torej z ravninsko raziskavo zajeli samo obtežbo v eni smeri, pri obtežbi v drugi smeri pa je potrebna prostorska obravnava, zato je najbolj smotno celotno konstrukcijo obravnavati prostorsko.

Majhno nesimetrijo največkrat zanemarimo.

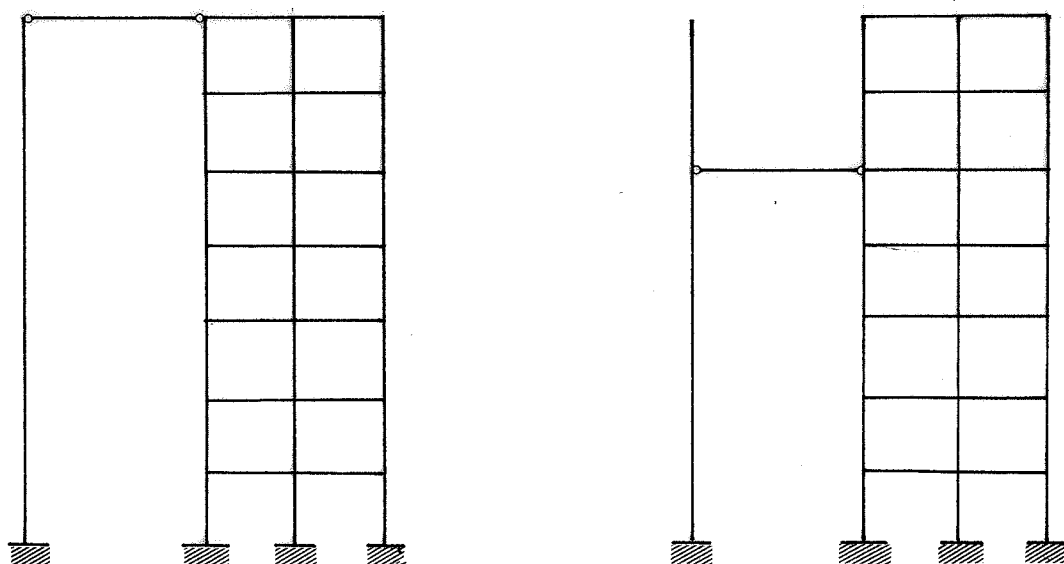
Predpostavka o togih ploščah povzroči v posebnem primeru simetrične (ravninske) konstrukcije, da so pomiki vseh elementov v vsaki etaži enaki. Računsko shemo take konstrukcije lahko prikažemo v ravnini (slika 3.5).



Slika 3.5. Konstrukcija in računska shema.

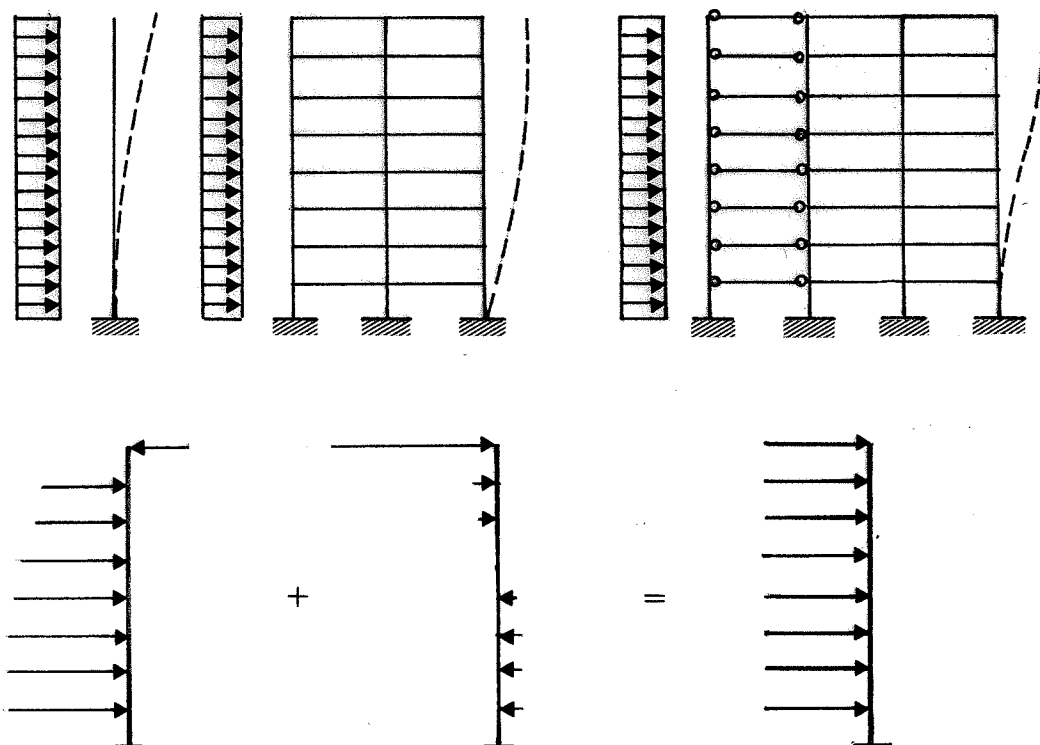
Pred leti se je za analizo ravninske konstrukcije uporabljala "peš" metoda "poskusi in popravi", kjer je možno z iteracijskim postopkom razdeliti celotno zunanjo obtežbo na obtežbe posameznih elementov. Pri pravilno razdeljeni obtežbi morajo biti deformacije vseh elementov enake in to mora veljati za vsako etažo.

V praksi se pogosto uporablja razdelitev obtežbe v razmerju "togosti", pri čemer to togost definira en sam parameter in sicer je to običajno togost na vrhu ali na dveh tretjinah višine objekta. Tej metodi ustrezata računski shemi na sliki 3.6.



Slika 3.6. Računski shemi pri razdelitvi obtežbe v razmerju "togosti", podanih z enim parametrom.

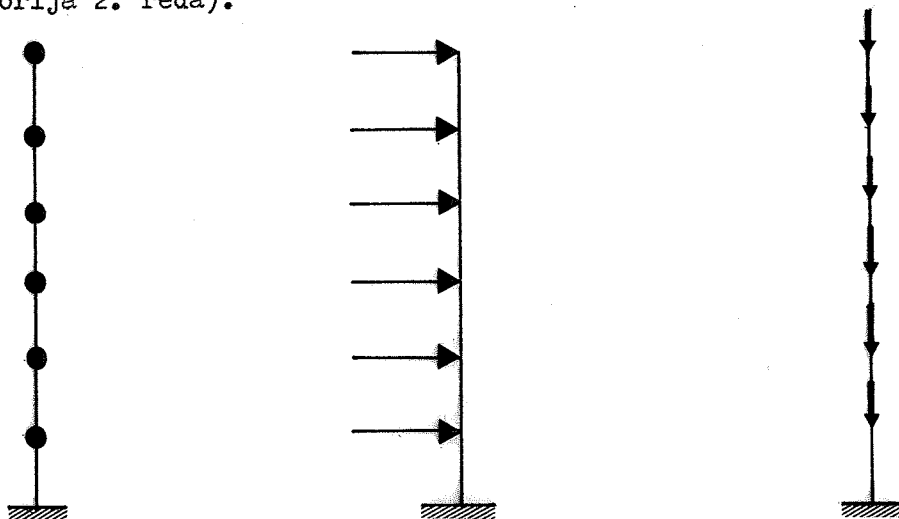
Kot rezultat računa dobimo deleže celotne zunanje obtežbe, ki odpadejo na posamezne elemente in ti deleži veljajo za obtežbo po vsej višini objekta. Obtežba na vrhu se razdeli enako kot obtežba v prvi etaži. Ta metoda je korektna samo za elemente, ki imajo vsi podobne ali vsaj približno podobne deformacijske linije. Če imamo n. pr. skupino sten, ki so medsebojno povezane samo s ploščami in če imajo te stene take dimenzije, da jih obravnavamo kot linijske elemente (konzole) in če so strižne deformacije nepomembne, potem lahko razdelimo zunanjo obtežbo na posamezne stene enostavno v razmerju vztrajnostnih momentov. Vse stene imajo namreč podobne deformacijske linije, medsebojno razmerje velikosti deformacij pa je odvisno samo od razmerja vztrajnostnih momentov (če so elastični moduli in višine vseh sten enaki). Čim upoštevamo tudi vpliv strižnih deformacij, deformacijske linije niso več popolnoma podobne in konstantna razdelitev obtežbe po celotni višini je samo še približek. Če želimo razdeliti obtežbo med steno in okvir, potem je enaka razdelitev po celi višini popolnoma nekorektna, saj sta obliki deformacij obeh elementov popolnoma različni. Praviloma prevzame večji del obtežbe stena, le na vrhu se stena nasloni na okvir, tako da obtežba elementa celo menja predznak (slika 3.7.)



Slika 3.7. Deformacijske linije konzole, okvirja in mešane konstrukcije ter razdelitev obtežbe pri mešani konstrukciji.

(lokalne deformacije na področju višine ene etaže niso risane)

Posledica omejitve prostostnih stopenj na horizontalne premike je, da je možno direktno upoštevati le horizontalno obtežbo (sile in torzijske momente). Zunanja obremenitev n. pr. z upogibnimi momenti ni možna. Vertikalno obtežbo je možno podati, vendar program upošteva le vpliv te obtežbe na horizontalne premike (teorija 2. reda).

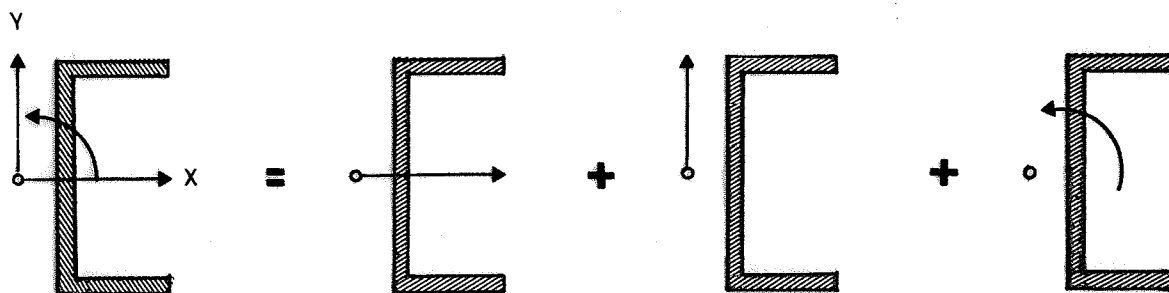


Slika 3.8. Računska shema s koncentriranimi masami, horizontalno in vertikalno obtežbo.

Poenostavitev računa pri dinamični obtežbi predstavljajo koncentrirane mase v višinah medetažnih plošč (slika 3.8). Kot kažejo raziskave, ta poenostavitev pri običajnih konstrukcijah zelo malo vpliva na natančnost rezultatov, saj je večinoma večji del mase dejansko koncentriran v višini plošč (mase plošč in koristne obtežbe na ploščah). Maso vertikalnih elementov vsake etaže razdelimo v enakih delih na zgornjo in spodnjo ploščo ali kar v celoti na zgornjo ploščo. Ta drugi način je bolj približen, vendar enostavnejši in na varni strani.

Vsak makroelement je strogo vzeto prostorski, to pomeni, da je sposoben prevzeti vsaj nekaj obtežbe v vseh treh smereh in vse tri komponente momenta. V skladu z našo izbiro prostostnih stopenj nas neposredno zanima nosilnost elementov pri obtežbi v horizontalni ravnini. Pri tem izberemo lokalni koordinatni sistem elementa z izhodiščem v strižnem središču prereza elementa in koordinatnimi osmi, ki so vzporedne glavnim osem elementa. Predpostavljeno je, da se lokalni koordinatni sistem elementa po višini konstrukcije ne spreminja, pri večini elementov pa se lahko spreminjajo statične karakteristike prereza. Poljubno obtežbo v horizontalni ravnini je vedno možno nadomestiti z momentom in silo s prijemališčem v strižnem središču elementa. To silo je nadalje možno razstaviti na dve komponenti v smereh glavnih osi. Pri taki obtežbi povzroči vsaka komponenta obtežbe samo premik v smeri delovanja komponente (če upoštevamo

statično teorijo 1. reda). Sila v x-smeri povzroči pomik v x smeri, sila v y smeri pomik v y smeri in torzijski moment zasuk. Pomika in zasuk niso medsebojno povezani, kar pomeni, da lahko vsako smer obravnavamo popolnoma neodvisno, oziroma, da prostorski makroelement lahko razbijemo na tri neodvisne makroelemente, od katerih je vsak nosilen v eni smeri (slika 3.9). Ta postopek je točen v primeru statičnega računa po teoriji 1. reda.



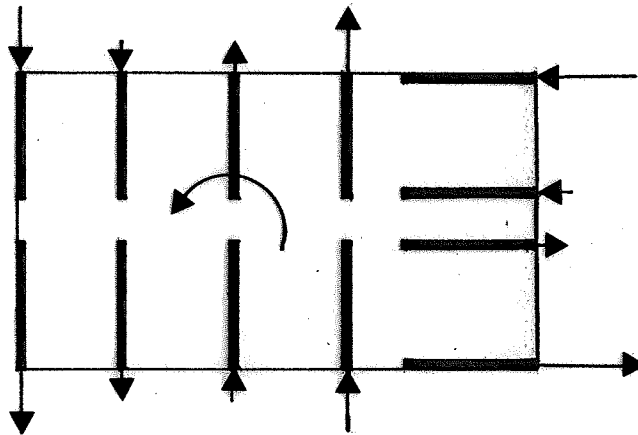
Slika 3.9. Razbitje prostorskega elementa na tri ravninske elemente.

Če izberemo dinamični račun ali račun stabilnosti, ali če upoštevamo teorijo 2. reda, potem v splošnem prostorskega elementa ni več možno razbiti na tri neodvisne elemente. Če to kljub temu naredimo, potem zanemarimo nekatere lokalne vplive, ki pri običajnih konstrukcijah v visokogradnji zelo malo vplivajo na rezultate. Pomembnejši so lahko ti vplivi samo, če prostorsko nosilno konstrukcijo predstavlja en sam nesimetričen makroelement. Program EAVEK zahteva v vsakem primeru razdelitev prostorskih makroelementov na tri neodvisne elemente.

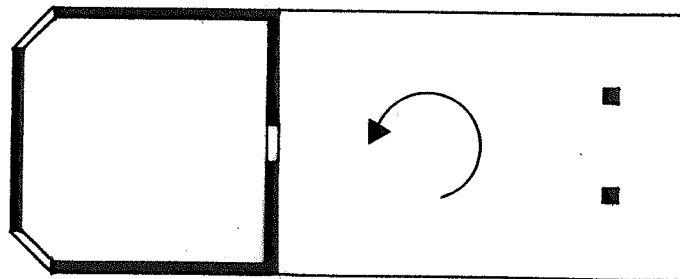
Pri praktični uporabi programa uvedemo še nadaljnje poenostavitve. Vedno poskušamo oceniti, kateri elementi zelo malo doprinašajo k nosilnosti celotne konstrukcije in jih zato lahko zanemarimo. Povsem jasno je, da je n. pr. nosilnost sten v smeri manjše tlorisne dimenzije običajno zanemarljivo majhna. Isto velja za nosilnost ravninskih okvirjev pravokotno na ravnino okvirja in za torzijsko nosilnost sten in ravninskih okvirjev. Take elemente podamo v programu kot en sam element z nosilnostjo v smeri daljše tlorisne dimenzije. Izjemo lahko predstavlja le že opisani primer (slika 3.2), ko je zgradba zsnovana tako, da potekajo vse ali skoraj vse stene v eni smeri (n. pr. pri gradnji s tunnelskimi opaži). V takem primeru vzamemo, da tvorijo stene skupno s ploščami okvir ki ga upoštevamo v računu.

Večkrat zanemarimo tudi nosilnost okvirja ali stene v smeri daljše tlorisne dimenzije, če ocenimo, da je ta nosilnost zelo majhna v primerjavi z nosilnostjo celotne konstrukcije.

Pri zgradbah običajnih tlorisov prevzamejo večji del torzijske obremenitve upogibni elementi (slika 3.10) in le majhen del elementi s torzijsko nosilnostjo. Običajno lahko zato v takem primeru torzijske nosilnosti posameznih elementov zanemarimo. Bolj redek je obraten primer, ko je konstrukcija taka, da mora celotno ali večji del torzijske obremenitve prevzeti element s svojo torzijsko nosilnostjo (slika 3.11). V takem primeru seveda torzijske nosilnosti elementa ne smemo zanemariti.



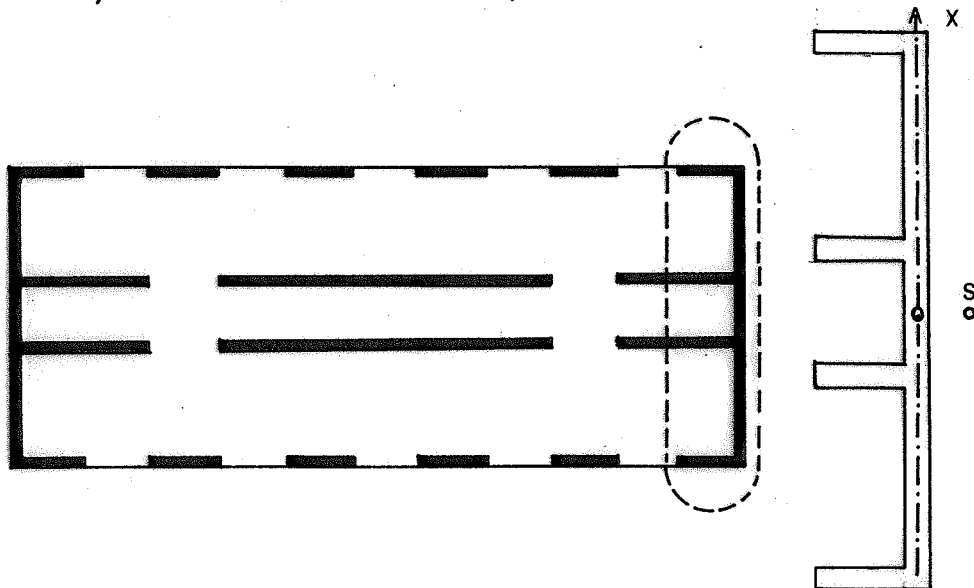
Slika 3.10. Prevzem torzije z upogibnimi elementi.



Slika 3.11. Prevzem večjega dela torzije s torzijskim elementom.

Pri oceni velikosti vpliva torzijske nosilnosti posameznih elementov upoštevamo tudi, da imajo zaprti profili (n. pr. škatla ali cev) bistveno večjo torzijsko nosilnost kot odprti profili.

S pojmom torzije je povezan pojem strižnega središča elementa, ki se le izjema (pri dvojno simetričnih prerezih) ujema s težiščem prereza elementa. Če deluje horizontalna sila na element v njegovem strižnem središču, potem ne povzroča torzije. Določanje strižnega središča elementa zahteva večkrat zamuden račun (podobno kot račun torzijskih karakteristik), zato pri objektih običajnih tlorisov, kjer predstavlja nosilno konstrukcijo večje število makroelementov, podamo kot izhodišče lokalnega koordinatnega sistema elementa namesto strižnega središča težišče, oziroma kar točko na daljši stranici elementa (slika 3.12).



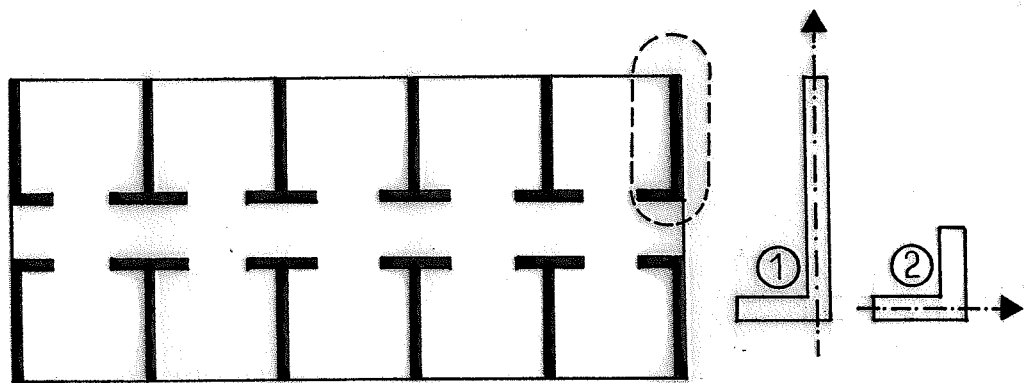
Slika 3.12. Praktična izbira izhodišča lokalnega koordinatnega sistema.

Podobno kot pri torziji velja tudi tu, da čim večji je doprinos elementa k nosilnosti konstrukcije, tem natančneje je potrebno podajati vrednosti podatkov in obratno.

S podanima koordinatama izhodišča lokalnega koordinatnega sistema elementa definiramo položaj elementa v konstrukciji, ki je bistveno važen za torzijsko nosilnost celotne konstrukcije (glej sliko 3.10). Doprinos upogibnega elementa k torzijski nosilnosti konstrukcije je premo sorazmeren upogibni nosilnosti elementa in kvadratu pravokotne razdalje elementa od centra rotacije. Iz te ugo-

toovitve sledi, da je pri elementih, katerih nosilna smer se ujema z globalno X ali Y smerjo konstrukcije, za račun pomembna le ena sama koordinata in sicer y koordinata za elemente nosilne v X smeri in x koordinata za elemente nosilne v Y smeri.

Pri elementih sestavljenih prerezov se večkrat poslužujemo nadaljnjih poenostavitvev, tako da ne določamo točnih smeri glavnih osi, pač pa vzamemo kot smeri glavnih osi kar tiste smeri, v katerih se element razteza.



Slika 3.13. Praktična izbira elementov.

Tako n. pr. element po sliki 3.13 razdelimo na dva upogibna elementa. Pri tem obakrat upoštevamo, da sodeluje tudi del stene, ki je pravokotna na nosilno smer. Sodelujočo širino izračunamo lahko po veljavnih predpisih za armirano-betonske konstrukcije.

Omenjeno je bilo že, da so pri dinamični analizi upoštevane koncentrirane mase v višini posameznih medetažnih plošč. Pri prostorskih konstrukcijah je važna tudi tlorisna razporeditev mas v etaži, ki vpliva na velikost masnega vztrajnostnega momenta. Običajno vedno predpostavimo, da je masa enakomerno razporejena po tlorisu etaže, le izjemoma upoštevamo tudi koncentrirane mase, ki jih je možno zajeti bodisi pri računu masnega vztrajnostnega momenta konstrukcije, bodisi podati kot mase elementa, če se njihov tlorisni položaj ujema s tlorisnim položajem elementa.

Podobno kot podatke o masah podajamo tudi podatke o vertikalni obtežbi pri stabilnostni analizi in analizi po teoriji 2. reda. Vertikalna obtežba je vedno vzeta kot koncentrirana v višini medetažnih plošč, pri prostorskih konstrukcijah pa je spet važna tlorisna razporeditev te obtežbe po etaži. Pretežni del

vertikalne obtežbe deluje koncentrirano v težiščih elementov (vsa obtežba zgornjih etaž), zato je najbolj korektno podajati to obtežbo kot obtežbo elementov. Če so posamezni elementi približno enakomerno porazdeljeni po tlorisu in če je torzijska togost konstrukcije velika, potem je kot približek možno predpostaviti podobno kot pri masah enakomerno razporeditev vertikalne obtežbe po tlorisu etaže.

Pri dinamični analizi večetažnih zgradb ima pomemben vpliv le majhno število nihajnih oblik, ki ustrezajo največjim nihajnim dobam. Pri ravninskih konstrukcijah upoštevamo običajno največ tri nihajne oblike, pri prostorskih pa največ devet, kar je tudi maksimalno dovoljeno število v programu EAVEK. Vedno so najpomembnejše osnovne nihajne oblike, kjer se predznaki premikov po etažah ne menjajo. Pri ravninskih konstrukcijah obstaja ena osnovna nihajna oblika, pri prostorskih pa praviloma tri (slika 3.14) zaradi upoštevanih treh komponent premika v prostoru (dva pomika in zasuk).

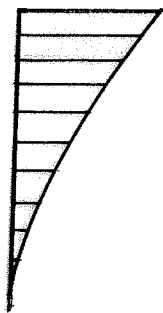
Osnovnim nihajnim oblikam ustrezajo največje nihajne dobe. Doprinos višjih nihajnih oblik k celotnim premikom konstrukcije je vedno minimalen, pri vitkih konstrukcijah pa lahko višje nihajne oblike bistveno povečajo notranje sile v zgornjem delu konstrukcije.

Pri računu elastične stabilnosti imajo praktičen pomen le osnovne uklonske oblike, kjer se, podobno kot pri osnovnih nihajnih oblikah, predznaki premikov po etažah ne menjajo. Osnovnim uklonskim oblikam pripadajo najnižje uklonske varnosti. Uklonsko varnost pri vsaki uklonski obliki predstavlja en sam parameter. Kritične uklonske sile so definirane kot produkt uklonske varnosti in dejanske vertikalne obtežbe, kar pomeni, da je z uporabljenno metodo možno določati le elastično stabilnost pri enakomernem večanju celotne vertikalne obtežbe.

Za dinamično analizo konstrukcij pri seizmični obtežbi lahko izbiramo med metodo s spektrom odziva ali med računom časovnega poteka odziva konstrukcije. Prva možnost je enostavnejša in cenejša, druga pa točnejša pri znani obtežbi (pospeški temeljnih tal). Ker obtežbe pri možnih bodočih potresih ne poznamo, je večja točnost druge metode večkrat brez posebnega pomena, zato za običajne konstrukcije uporabljamo metodo s spektrom odziva. Račun časovnega poteka odziva je zaenkrat v praksi potreben le za zelo pomembne ali zelo komplicirane objekte.

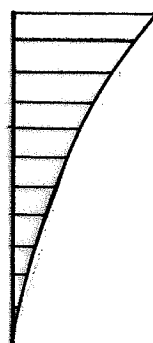
RAVNINSKA KONSTRUKCIJA

1.OBLIKA

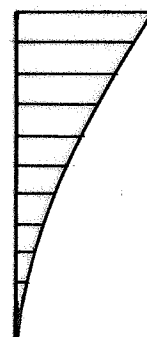
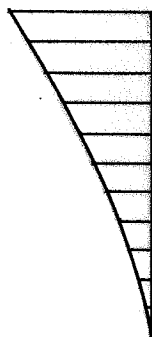
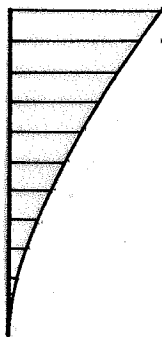


PROSTORSKA KONSTRUKCIJA

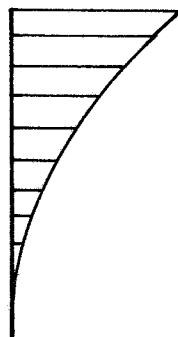
1.OBLIKA



2.OBLIKA



3.OBLIKA



POMIK X

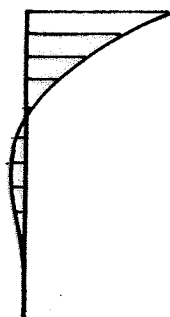
POMIK Y

ZASUK

Slika 3.14. Primer osnovnih nihajnih oblik

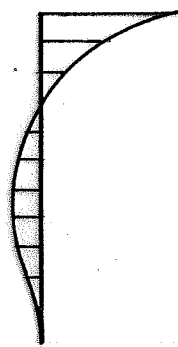
RAVNINSKA KONSTRUKCIJA

2. OBLIKA

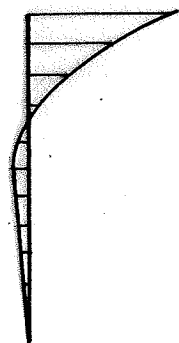


PROSTORSKA KONSTRUKCIJA

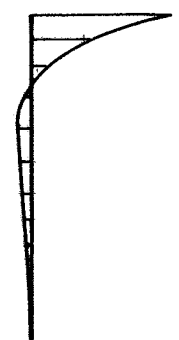
4. OBLIKA



5. OBLIKA



6. OBLIKA



POMIK X

POMIK Y

ZASUK

Slika 3.15. Primer višjih nihajnih oblik

4. ELEMENTI

V tem poglavju so opisani elementi, ki jih uporablja program EAVEK. Podane so računske sheme, izrazi za podajnostne, masne in geometrijske matrike in za račun notranjih sil. Povsod so opisane samo predpostavke in prikazane končne enačbe, izpeljave pa so zbrane v literaturi [1] do [3]. Pojem element se nanaša na elemente, ki jih uporablja program, to je na elemente, ki so že razbiti na posamezne nosilne smeri in so nosilni v eni sami smeri (upogibni in torzijski element).

4.1 Togostne matrike elementov

Ker se v računu omejimo le na bistvene prostostne stopnje (glej poglavje o računskem modelu konstrukcije), uporabljamo tako imenovane kondenzirane togostne matrike, kjer so eliminirane tiste nebistvene prostostne stopnje, ki jih v nadaljnjem računu ne upoštevamo. V [3] smo take matrike imenovali "stranske togostne matrike" po angleškem izrazu "lateral stiffness matrices". Kondenzirane togostne matrike povezujejo horizontalno obtežbo s horizontalnimi premiki in imajo v našem primeru red enak številu etaž elementa. Določimo jih lahko z znanim postopkom kondenzacije. Če kompletno togostno matriko elementa uredimo tako, da grupiramo bistvene (indeks b) in nebistvene (indeks n) prostostne stopnje in matriko razdelimo na podmatrike

$$\begin{bmatrix} k_{bb} & k_{bn} \\ k_{nb} & k_{nn} \end{bmatrix},$$

izračunamo kondenzirano togostno matriko po enačbi

$$[k] = [k_{bb}] - [k_{bn}][k_{nn}]^{-1}[k_{nb}].$$

V programu EAVEK je izbrana druga pot za določitev kondenziranih togostnih matrik elementov. Najprej so izračunane podajnostne matrike elementov, nato pa so z inverzijo teh dobljene kondenzirane togostne matrike, saj velja

$$[k] = [f]^{-1},$$

kjer je s $[f]$ označena podajnostna matrika.

4.2 Podajnostne matrike elementov

Za standardne elemente, ki jih uporablja program, podajamo računske sheme, uporabljene predpostavke in končne enačbe za račun koeficientov podajnostnih matrik in za račun notranjih sil. Izpeljave enačb so prikazane v [3]. Koeficienti podajnostne matrike vedno predstavljajo horizontalne pomike ali zasuke v posameznih točkah zaradi delovanja enotne horizontalne obtežbe. Z oznako i je označeno prijemališče obtežbe, z oznako j pa mesto pomika. Pri tem je vzeto, da leži točka i nad točko j ali da se z njo ujema. Po zakonu recipročnosti velja, da je premik v točki j zaradi obtežbe v točki i enak premiku v točki i zaradi obtežbe v točki j , zato je podajnostna matrika vedno simetrična in velja

$$f_{ij} = f_{ji} \quad ,$$

kjer f označuje koeficient podajnostne matrike, prvi indeks se nanaša na mesto premika, drugi pa na mesto obtežbe. Indeksa i in j se ujemata z oznakami etaž.

Oznake v enačbah pomenijo :

E, G	elastični in strižni modul
H	višina elementa
h, h_j	višina etaže (velja za vse etaže oziroma za etažo j)
z_i, z_j	višinski koti točk i in j (etaž i in j)
F	prerez (ploščina)
F_S	strižni prerez ($F_S = F/\kappa$)
J	vztrajnostni moment .

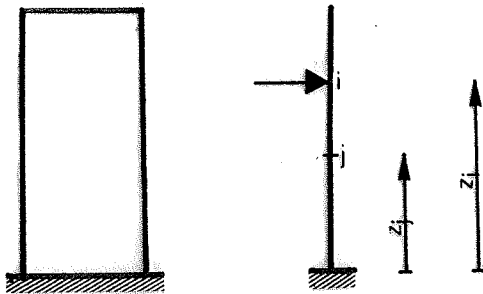
Oznake, ki se pojavljajo samo pri posameznih elementih, so pojasnjene pri elementih.

Pri vsakem elementu je označeno, če se lahko spreminjajo njegove karakteristike po višini. V takih primerih je pri izpeljavi enačb vedno predpostavljeno, da so razmere po višini ene etaže konstantne. Pri vseh elementih je upoštevana toga vpetost celotnega elementa.

Stena brez odprtin

TYPE CANTILEVER - upogibni element

Element in računska shema :



Predpostavke:

Uporabljena je tehnična upogibna teorija linearnih nosilcev. Upoštevane so upogibne in strižne deformacije. Prerez elementa se lahko spreminja po višini.

Podajnostna matrika:

Konstanten prerez

$$f_{ji} = \frac{z_j}{GF_s} + \frac{z_j^2}{6EJ} (3z_i - z_j)$$

Nekonstanten prerez

$$f_{ji} = f_{j-1,i} + f'_{j-1,i} h_j + \frac{1}{6EJ_j} (3z_i h_j^2 - z_j^3 - 2z_{j-1}^3 + 3z_j z_{j-1}^2) + \\ + \frac{1}{G} \left(\frac{1}{F_{sj}} - \frac{1}{F_{sj-1}} \right) h_j$$

$$f'_{ji} = f'_{j-1,i} + \frac{1}{2EJ_j} (2z_i h_j - z_j^2 + z_{j-1}^2) + \frac{1}{G} \left(\frac{1}{F_{sj}} - \frac{1}{F_{sj-1}} \right)$$

$$f_{oi} = f'_{oi} = 0$$

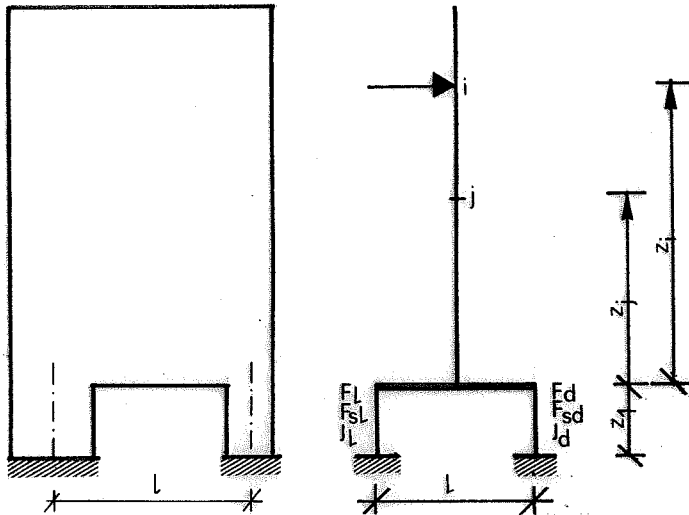
Notranje sile:

Prečne sile in upogibne momente računamo po znanih enačbah za konzolo.

Stena na stebrih

TYPE SCANTILEVER - upogibni element

Element in računska shema:



Predpostavke:

Uporabljena je tehnična upogibna teorija linearnih nosilcev. Stebri se lahko raztezajo samo preko ene (prve) etaže. Prečka je neskončno toga. Upoštevane so deformacije zaradi upogibnih momentov, prečnih sil in osnih sil. Pri določanju osnih sil v stebrih je predpostavljen momentni členek na sredini višine prve etaže. Prerez stene se lahko spreminja po višini elementa.

Podajnostna matrika:

$$f_{ji} = f_{zg} + \frac{d_l d_d}{d_l + d_d} + \frac{1}{l^2 E} \left(\frac{1}{F_l} + \frac{1}{F_d} \right) z_l \left(z_i + \frac{z_l}{2} \right) \left(z_j + \frac{z_l}{2} \right)$$

$$d_l = \frac{z_l^3}{12 E J_l} + \frac{z_l}{G F_{sl}}, \quad d_d = \frac{z_l^3}{12 E J_d} + \frac{z_l}{G F_{sd}}$$

Za f_{zg} veljajo enačbe podane pri stenah brez odprtin, s tem da pričnemo meriti višinske kote od 1. etaže navzgor. Prerez zgornjega dela se lahko spreminja.

Notranje sile:

Osna sila zaradi obtežbe s silo v točki i je enaka v obeh stebrih in jo določimo ob predpostavki, da je na sredini višine stebrov momentni členek

$$N = \frac{P}{L} \left(z_i + \frac{z_1}{2} \right) .$$

Pri določanju upogibnih momentov upoštevamo tudi vpliv spremembe dolžine osi zaradi osne sile, zato momentni členek ni več na sredini višine stebrov. Prečno silo in upogibne momente razdelimo na oba stebra v razmerju togosti:

$$Q = P$$

$$Q_L = \frac{Q \cdot d_d}{d_L + d_d} , \quad Q_d = \frac{Q \cdot d_L}{d_L + d_d}$$

$$M_{zgl} = - \frac{Q_L z_1}{2} + J_L \left(\frac{1}{F_L} + \frac{1}{F_d} \right) \frac{N}{L} \quad (\text{moment levega stebra zgoraj})$$

$$M_{spl} = - \frac{Q_L z_1}{2} - J_L \left(\frac{1}{F_L} + \frac{1}{F_d} \right) \frac{N}{L} \quad (\text{moment levega stebra spodaj})$$

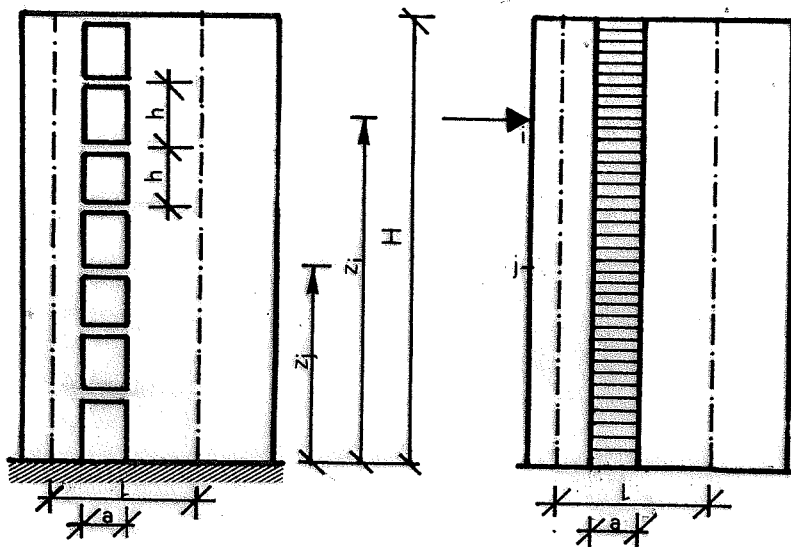
in analogno za desni steber.

Notranje sile za poljubno obtežbo dobimo z linearno kombinacijo vrednosti, ki ustrezajo obtežbi s silo P v točki i .

Stena z odprtinami

TYPE WALL -upogibni element

Element in računska shema:



Predpostavke:

Uporabljena je tehnična upogibna teorija linearnih nosilcev. Upoštevano je, da imata obe steni enako deformacijsko linijo. Prečke nadomestimo s kontinuirno elastično povezavo (namesto prečk v višinah etaž upoštevamo povezavo, ki je zvezno porazdeljena po celotni višini stene in ima isto podajnost kot prečke - glej sliko), zato so rezultati točnejši pri večjem številu etaž, spodnja meja uporabnosti pa je 4 do 6 etaž. Možna je ena sama vrsta odprtin ali dve vrsti odprtin simetrično. Vse statične karakteristike in višine etaž so enake po celotni višini. Upoštevane so upogibne in strižne deformacije sten in prečk ter sprememba dolžine osi sten. Razdelitev upogibnih momentov in prečnih sil se izvrši v razmerju vztrajnostnih momentov.

Podajnostna matrika:

$$J = J_l + J_d, \quad F = F_l + F_d, \quad F_s = F_{sl} + F_{sd}$$

$$c_2^2 = \frac{12 l J_c}{3 a h J}, \quad c^2 = c_2^2 \left(1 + \frac{J F}{l F_l F_d} \right)$$

$$J_c = \frac{J_p}{1 + c_3 \frac{E J}{a G F_{sp}}}$$

$$3 \leq c_3 \leq 12$$

Konstanta c_3 je odvisna od razmerja vztrajnostnih momentov leve in desne stene (od položaja momentne ničelne točke v prečki). Če je momentni členek na sredini prečke, velja $c_3 = 12$ in če je na robu prečke velja $c_3 = 3$.

$$f_{ji} = \frac{1}{EJ} \left\{ \left(\frac{z_j^2 z_i}{2} - \frac{z_j^3}{6} \right) \left(1 - \frac{c_2^2}{c^2} \right) + \frac{c_2^2 c_1}{c^4} \left[z_j + \frac{1}{c \cosh c H} \cdot \right. \right. \\ \left. \cdot (\sinh c (H - z_j) - \sinh c H + \sinh c (H - z_i)) \cdot \right. \\ \left. \left. \cdot (1 - \cosh c z_j) \right) \right] \right\} + \frac{1}{G F_s} z_j$$

Iste enačbe je možno uporabiti tudi za račun podajnostne matrike stene z dvema simetričnima vrstama odprtín. Zaradi simetrije se lahko omejimo le na polovico konstrukcije, pri čemer moramo ustrezno spremeniti konstante

$$F'_l = 2 F_l, \quad F'_{sl} = 2 F_{sl}, \quad J'_l = 2 J_l$$

$$F'_d = \infty, \quad F'_{sd} = F_{sd}, \quad J'_d = J_d$$

$$F'_{sp} = 2 F_{sp}, \quad J'_p = 2 J_p.$$

Notranje sile:

Prečna sila v kontinuirni elastični povezavi na višinski koti z zaradi obtežbe s silo v točki i je podana z enačbama:

$$q_s = \frac{P c_2^2}{c^2} \left\{ \frac{-c_1}{\cosh c H} \left[\cosh c (H - z) + \sinh c z \sinh c (H - z_i) \right] + 1 \right\} \\ q_z = \frac{P c_2^2}{c^2} \left\{ \frac{-c_1}{\cosh c H} \left[\cosh c (H - z) + \sinh c z \sinh c (H - z_i) \right] + \right. \\ \left. + c_1 \cosh c (z - z_i) \right\}$$

$$c_1 = 1 - \frac{E J}{G F_s} c^2.$$

Indeks s označuje področje pod mestom delovanja sile, indeks z pa področje nad tem mestom. Prečne sile zaradi poljubne obtežbe dobimo z linearno kombinacijo vplivov zunanje obtežbe v vseh etažah.

Prečne sile v prečkah dobimo, če množimo porazdeljeno prečno silo z etažnimi višinami. Osna sila je enaka v obeh stenah in jo izračunamo s seštevanjem prečnih sil v prečkah nad mestom iskanе osne sile. Upogibni moment v obeh stenah je enak celotnemu upogibnemu momentu zunanje obtežbe, zmanjšanemu za moment obeh osnih sil v stenah. Ta moment je nato razdeljen v razmerju vztrajnostnih momentov obeh sten. V istem razmerju je razdeljena tudi prečna sila, ki je enaka vsoti zunanje obtežbe nad obravnavanim prerezo. Upogibni momenti v prečkah (niso izračunani v programu) so enaki produktu prečnih sil in ročic (oddaljenosti mesta iskanega momenta od momentnega članka, ki je praktično skoraj vedno na sredini prečke).

Pri stenah z dvema vrstama odprtín se notranje sile nanašajo na nadomestni računski model z eno vrsto odprtín, zato se prečne sile v prečkah, osne sile, prečne sile in upogibni momenti v levi steni (ustreza dvema krajnima stenama) nanašajo na dve prečki oziroma steni in jih je treba pri dimanzioniranju deliti z dva. Prečne sile in upogibni momenti v desni steni (ustreza srednji steni) so podani v pravem iznosu, medtem ko je osna sila v desni steni enaka nič.

V programu je uporabljena korekcija, ki zmanjšuje vpliv strižnih deformacij prečke ([3]).

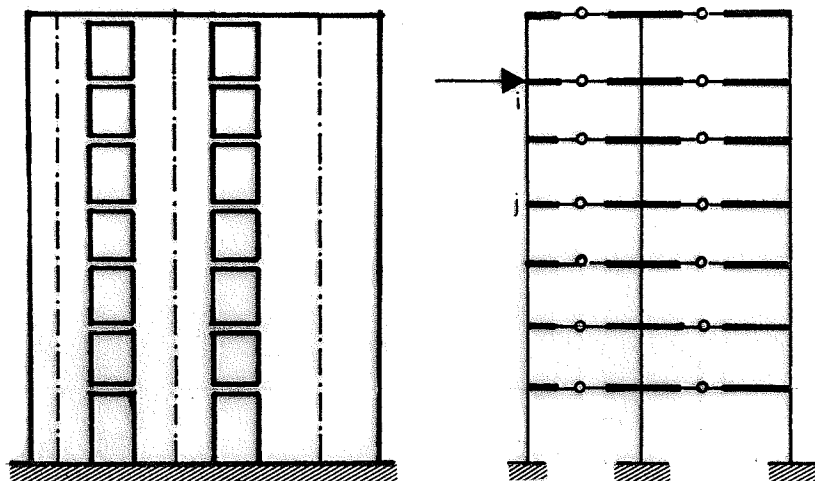
$$c_1 = 1 - \frac{E J a}{G F_s l} c^2$$

Analogno je korigiran tudi zadnji sumand v enačbi za račun koeficientov podajnostne matrike

$$\frac{1}{G F_s} \frac{2l - a}{l} z_j \quad \text{namesto} \quad \frac{1}{G F_s} z_j$$

Stena z odprtinami (splošne enačbe)

TYPE SWALL - upogibni element



Predpostavke:

Uporabljena je tehnična upogibna teorija linearnih nosilcev. Predpostavljamo je, da imajo vse stene enako deformacijsko linijo. Prerezi in višine etaž se lahko spreminjajo. Osi posameznih sten ne smejo biti lomljene. Upoštevane so upogibne in strižne deformacije prečk ter upogibne deformacije in spremembe dolžine osi sten. Strižne deformacije sten so zajete samo pri računu pomikov. Momentni členki so predpostavljeni na sredini prečk. Razdelitev upogibnih momentov in prečnih sil na obe steni se izvrši v razmerju vztrajnostnih momentov.

Podajnostna matrika in notranje sile:

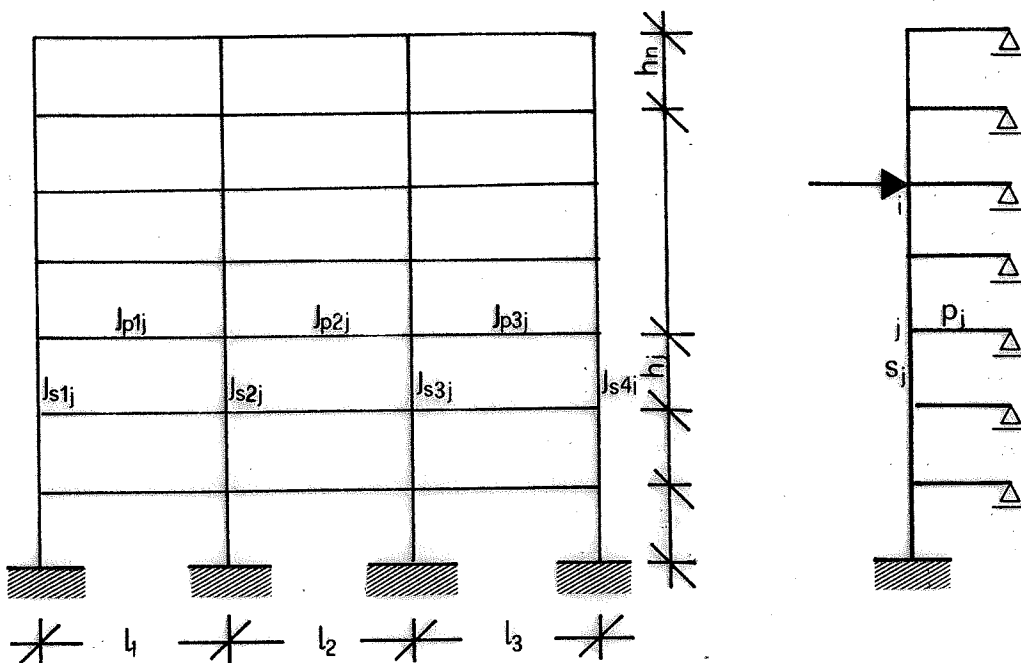
Uporabljena je diskretna računska shema, postavljen sistem enačb velikosti $n \times m$, kjer je n označeno število etaž, m pa število vrst odprtin. Sistem enačb je simetričen in pasoven. Podrobnosti so opisane v [1] in [2].

Z rešitvijo sistema enačb izračunamo osne sile v stenah in z osnimi silami so povezane prečne sile v prečkah. Upogibne momente v prečkah dobimo kot produkt prečne sile, ki jo postavimo na sredino prečke (predpostavka o momentnem členku) in ustrezne ročice. Upogibne momente zunanje obtežbe zmanjšamo za momente, ki jih tvorijo osne sile v stenah in jih razdelimo v razmerju vztrajnostnih momentov. V istem razmerju razdelimo tudi prečne sile v stenah. Na podlagi znanih upogibnih momentov v stenah je možno izračunati pomike, ki predstavljajo koeficiente podajnostne matrike.

Ravninski okvir

TYPE FRAME - upogibni element

Element in računska shema:



Predpostavke:

Okvir ustreza "proporcionalnim" okvirjem, za katere velja računska shema po sliki. Momentni členek je predpostavljen na sredini stebrov in prečk, le pri stebrih v prvi etaži je upoštevan momentni členek na tistem mestu, kjer se pojavi pri enoetažnem okvirju. Zanemarjena je nosilnost okvirja nad koto delovanja zunanje obtežbe. Vpliv deformacij zaradi osnih in prečnih sil ni upoštevan. Členkasti priključki niso predvideni, vendar jih je mogoče približno zajeti s korekturo togosti.

Omenjene predpostavke dajejo uporabne rezultate za koeficiente podajnostne matrike pri regularnih okvirjih, kjer togosti prečk niso bistveno manjše od togosti stebrov. Za okvirje, ki ne ustrezajo navedenim predpostavkam, je treba uporabiti za račun podajnostne matrike drug program (n. pr. STRESS ali RAVOK).

Podajnostna matrika

$$s_j = \sum_k \frac{EJ}{h_j} \frac{s_{kj}}{L_k}, \quad p_j = \sum_k \frac{EJ}{L_k} \frac{p_{kj}}{L_k}$$

$$f_{11} = \frac{h_1^2}{12} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{4p_1 + 0.33s_1} \right), \quad f_{12} = f_{11} + \frac{h_1 h_2}{48p_1 + 4s_1} = f_{21}$$

$$f_{22} = f_{11} + \frac{h_2^2}{12} \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{4p_1} + \frac{1}{4p_2} \right) + \frac{h_1 h_2}{24p_1 + 2s_1}$$

$$f_{ii} = f_{i-1,i-1} + \frac{h_i^2}{12} \left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{4p_{i-1}} + \frac{1}{4p_i} \right) + \frac{h_{i-1}h_i}{24p_{i-1}}$$

$$f_{ji} = f_{jj} + \frac{h_j h_{j+1}}{48p_j}$$

V primeru členkaste vpetosti stebrov prve etaže velja (enačbe niso vključene v program):

$$f_{11} = \frac{h_1^2}{12} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{4}{s_1} \right)$$

$$f_{12} = f_{11} + \frac{h_1 h_2}{24p_1}$$

$$f_{22} = f_{11} + \frac{h_2^2}{12} \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{4p_1} + \frac{1}{4p_2} \right) + \frac{h_1 h_2}{12p_1}$$

Ostali koeficienti ostanejo nespremenjeni.

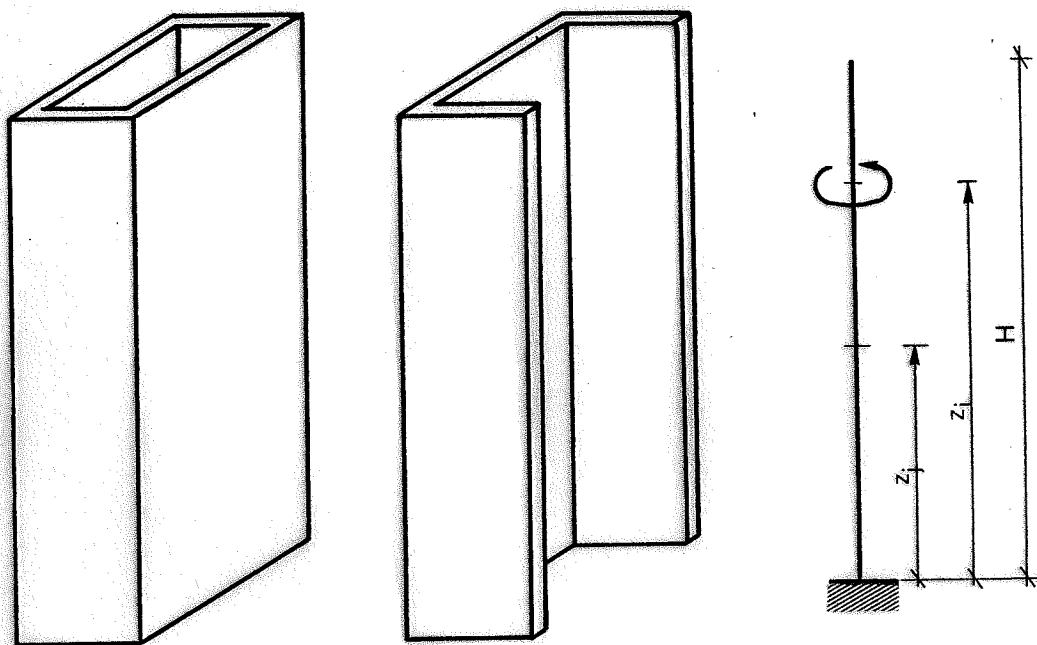
Notranje sile:

Izbrana računska shema je v splošnem premalo natančna za račun notranjih sil, zato je potrebno te količine računati z drugim programom.

Torzijski elementi

TYPE TUBE - torzijski element

Elementi in računska shema:



Predpostavke:

Uporabljena je tehnična teorija linearnih tenkostenskih nosilcev. Oblika prereza ostane po deformaciji ohranjena. V splošnem morajo biti statične karakteristike po višini elementa konstantne, le v posebnih primerih, ko zane-marimo bodisi vpliv Saint Venantove torzije, bodisi vpliv upogibne torzije, se lahko prerez spreminja. Prvi vpliv je običajno nepomemben pri odprtih profilih, drugi pa pri zaprtih.

Podajnostna matrika:

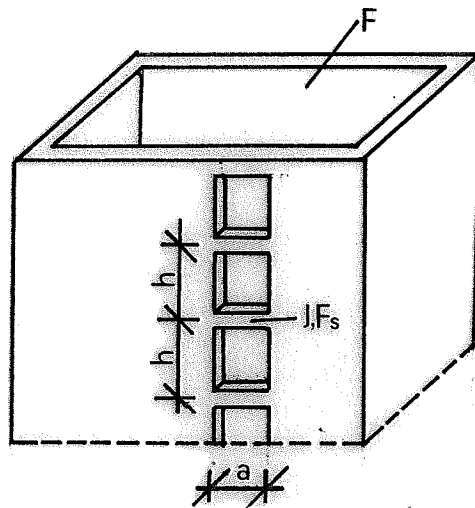
J_t = vztrajnostni moment pri Saint Venantovi torziji

J_ω = vztrajnostni moment pri upogibni torziji

$$c = \sqrt{\frac{G J_t}{E J_\omega}}$$

$$f_{ji} = \frac{1}{cG J_t} \left\{ \frac{1}{\cosh cH} \left[\sinh c(H - z_j) - \sinh cH + \sinh c(H - z_i) \right] \cdot (1 - \cosh cz_j) \right\} + cz_j$$

Enačba velja tudi za elastično povezane profile



kjer je treba vztrajnostni moment J_t korigirati po enačbi

$$J_t' = J_t + \bar{J}_t$$

Dodatni vztrajnostni moment $\bar{J}_t$ izračunamo z enačbo

$$\bar{J}_t = \frac{(2 F)^2}{dG}$$

kjer predstavlja F ploskev, ki jo oklepa jedro, d pa podajnost elastične povezave. Za jedro z odprtinami po sliki velja

$$d = \frac{a^3 h}{12 EJ} + \frac{ah}{GF_s}$$

Opisan način računa je tem bolj natančen, čim bolj elastična je povezava, medtem ko za zelo togo povezavo ni uporaben.

Če zanemarimo vpliv Saint Venantove torzije, kar je možno pri odprtih profilih, velja za konstanten presek po višini enačba

$$f_{ji} = \frac{z_j^2}{6EJ\omega} (3z_i - z_j)$$

in za nekonstanten presek

$$f_{ji} = f_{j-1,i} + f'_{j-1,i} h_j + \frac{1}{6EJ\omega_j} (3z_i h_j^2 - z_j^3 - 2z_{j-1}^3 + 3z_j z_{j-1}^2)$$

$$f'_{ji} = f'_{j-1,i} + \frac{1}{2EJ\omega_j} (2z_i h_j - z_j^2 + z_{j-1}^2)$$

$$f_{oi} = f'_{oi} = 0 \quad .$$

Če zanemarimo vpliv upogibne torzije, kar je možno pri zaprtih profilih oziroma jedrih z majhnimi odprtinami, velja enačba

$$f_{ji} = \sum_{k=1}^j \frac{h_k}{GJ_{tk}} \quad .$$

Notranje sile

Celotni torzijski moment je enak vsoti zunanjih torzijskih momentov nad obravnavanim prerezom. Ta moment konstrukcija deloma prenaša z mehanizmom Saint Venantove torzije (M_1) in deloma z mehanizmom upogibne torzije (M_2):

$$M = M_1 + M_2 \quad .$$

Moment M_2 na mestu j določimo z enačbo

$$M_1 = \frac{M}{\cosh cH} \left[-\cosh c(H - z_j) - \sinh cz_j \sinh c(H - z_i) + \right. \\ \left. + \cosh cH \cosh c\langle z_j - z_i \rangle \right]$$

$$\langle z_j - z_i \rangle = 0 \quad \text{za } z_j \leq z_i$$

$$\langle z_j - z_i \rangle = (z_j - z_i) \quad \text{za } z_j > z_i \quad .$$

Moment M_2 določimo po enačbi

$$M_2 = M - M_1 \quad .$$

Torzijski moment M_2 in bimoment B sta analogna prečni sili in upogibnemu momentu pri upogibnih nosilcih, zato velja za določitev bimomenta isti postopek kot za določitev upogibnega momenta.

V posebnih primerih velja kar

$$M_1 = M \quad \text{oziroma} \quad M_2 = 0 \quad ,$$

če zanemarimo vpliv upogibne oziroma Saint Venantove torzije.

Pri elementih z elastično povezanim profilom dobimo prečne sile v prečkah po enačbi

$$Q = \frac{2F}{GJ_t d} \quad \text{h} \quad M_1 \quad .$$

Nestandardni elementi

TYPE FLEXIBILITY

TYPE STIFFNESS

Poleg standardnih elementov, za katere program sam izračuna podajnostne matrike, je možno v programu uporabljati tudi katerikoli drugi element, za katerega smo sposobni na kakršenkoli način določiti podajnostno ali togostno matriko (n. pr. z drugim programom ali eksperimentalno).

4.3 Masne matrike elementov

Predpostavljeno je, da so mase koncentrirane v višini medetažnih plošč. Pri tem običajno vzamemo, da je masa enakomerno porazdeljena po tlorisu. Če želimo pri prostorskih konstrukcijah natančnejši račun, lahko upoštevamo, da so mase elementov koncentrirane v točkah, ki so podane kot koordinate elementov (praviloma strižna središča). Masna matrika vsakega elementa je diagonalna matrika, katere red je enak številu etaž elementa.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

Koeficienti masne matrike so pri upogibnih elementih mase, pri torzijskih pa masni vztrajnostni momenti (masa $\times$ vztrajnostni polmer na kvadrat), oboje koncentrirano v višinah posameznih etaž.

Predpostavka o koncentriranih masah ustreza izboru odsekoma konstantne interpolacijske funkcije pri določanju masne matrike (slika 3.3).

4.4 Geometrijske matrike elementov

Pri izpeljavi geometrijskih matrik ([4]) je bila uvedena predpostavka, da so deformacijske linije med posameznimi etažami linearne (slika 3.3) in na

ta način so bile dobljene tridiagonalne geometrijske matrike, ki veljajo za vse tipe elementov

[illegible]

Pri upogibnih elementih predstavlja c_j kvocient osne sile in etažne višine

$$c_i = \frac{N_i}{h_i}$$

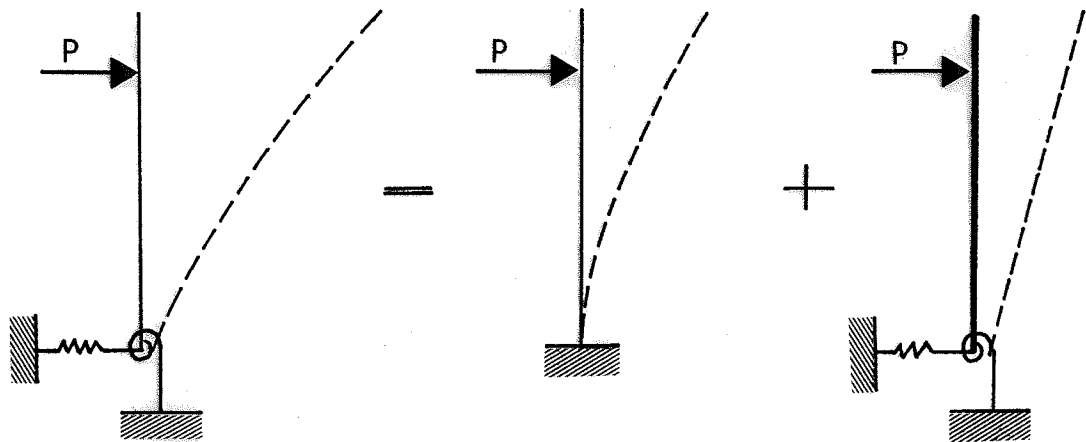
pri torzijskih elementih pa isto vrednost, pomnoženo s kvadratom vztrajnostnega polmera glede na podano izhodišče lokalnega koordinatnega sistema elementa (praviloma strižno središče)

$$c_i = \frac{N_i}{h_i} r_i^2$$

Oсна сила је израчунана као сума вертикалне обтежбе над обрађиваном тачком. Узето је, да је вертикална обтежба концентrirана у вишинaх плoшч.

4.5 Elastična vpetost elementov

Elastična vpetost elementov je podrobno obdelana v [3], na tem mestu pa je prikazan samo osnovni princip upoštevanja elastične vpetosti. Pri tem je mišljena elastična vpetost elementa kot celote (n. pr. element na togem pasovnem temelju, ki se lahko zasuka) in ne elastična vpetost posameznih delov elementa (n. pr. točkovni temelji stebrov okvirja). Ta drugi primer je potrebno upoštevati pri določanju podajnostne matrike elementa. Deformacije elementa, ki je kot celota elastično vpet, je možno določiti kot vsoto deformacij tega vpetega elementa in elastično vpetega togega elementa.



Elastično vpet element.

Ker so koeficienti podajnostne matrike elementa premiki elementa, je podajnostno matriko elastično vpetega elementa možno določiti kot vsoto podajnostnih matrik tega vpetega elementa in elastično vpetega togega elementa.

Elastične vpetosti ni mogoče direktno upoštevati v programu EAVEK, možno pa jo je simulirati s fiktivno spodnjo etažo.

5. MATRIKE KONSTRUKCIJE

S pomočjo matrik posameznih elementov tvorimo matrike celotne konstrukcije. Če je konstrukcija ravninska, dobimo matrike konstrukcije z enostavnim seštevanjem ustreznih matrik elementov. Pri elementih, ki ne segajo do vrha konstrukcije, dopolnimo matrike elementov z ničlami tako, da so velikosti matrik vseh elementov enake. Red matrik konstrukcije je enak številu etaž najvišjega elementa.

Pri prostorski konstrukciji je treba matrike elementov, ki so podane v lokalnih koordinatnih sistemih elementov, najprej transformirati v globalni koordinatni sistem (koordinatni sistem konstrukcije) in jih nato sešteti. Red matrike je enak trikratnemu številu etaž.

Togostna matrika ima obliko

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum[k_{xx}] & \sum[k_{xy}] & \sum(x[k_{xy}]) - \sum(y[k_{xx}]) \\ \text{simetrično} & \sum[k_{yy}] & \sum(x[k_{yy}]) - \sum(y[k_{xy}]) \\ & & \sum[k_{\varphi\varphi}] + \sum(y^2[k_{xx}]) + \sum(x^2[k_{yy}]) - 2\sum(xy[k_{xy}]) \end{bmatrix}$$

$[k_{xx}]$, $[k_{yy}]$, $[k_{xy}]$ so togostne matrike upogibnih elementov, transformirane v globalni koordinatni sistem.

Velja

$$\begin{aligned} [k_{xx}] &= \cos^2 \alpha [k_u] \\ [k_{yy}] &= \sin^2 \alpha [k_u] \\ [k_{xy}] &= \sin \alpha \cos \alpha [k_u] \end{aligned}$$

S $[k_u]$ je označena togostna matrika upogibnega elementa v lokalnem koordinatnem sistemu, z α pa kot med globalno X osjo in nosilno osjo elementa. Pri elementu, nosilnem v globalni X smeri, velja $\alpha = 0$, pri elementu, nosilnem v globalni Y smeri pa $\alpha = \pi/2$.

$[k_{\varphi\varphi}]$ so togostne matrike torzijskih elementov, x, y so koordinate elementov.

Seštevati je treba po vseh elementih konstrukcije. Zgradba togostne matrike konstrukcije kaže, da k torzijski togosti celotne konstrukcije prispevajo torzijske in upogibne togosti posameznih elementov.

Pri poenostavitvah, uporabljenih v programu, nosilne smeri elementov niso pomembne za masno in geometrijsko matriko konstrukcije. Njihova oblika je zato enostavnejša:

$$[M] = \begin{bmatrix} \Sigma[m_u] & 0 & -\Sigma(y [m_u]) \\ \text{simetrično} & \Sigma[m_u] & \Sigma(x [m_u]) \\ & & \Sigma((x^2 + y^2) [m_u]) + \Sigma[m_t] \end{bmatrix}$$

$z [m_u]$ so označene masne matrike upogibnih elementov, $z [m_t]$ masne matrike torzijskih elementov, $z x$ in y pa koordinate elementov. Seštevati je treba po vseh elementih, k tako dobljeni matriki pa prišteti še masno matriko zaradi mas, ki jih podamo direktno kot mase konstrukcije

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & 0 & -[m][y] \\ \text{simetrično} & [m] & [m][x] \\ & & [y][m][y] + [x][m][x] + [m_{\varphi}] \end{bmatrix}$$

$[m]$ je diagonalna matrika, sestavljena iz koncentriranih mas v posameznih etažah podobno kot masne matrike upogibnih elementov. $[m_{\varphi}]$ je diagonalna matrika, sestavljena iz masnih vztrajnostnih momentov, podobno kot masne matrike torzijskih elementov. $[x]$ in $[y]$ sta diagonalni matriki, ki združujeta x in y koordinate težišč posameznih etaž. Matriki imata podoben pomen kot skalarja x in y pri masni matriki, sestavljeni iz masnih matrik elementov, le da se težišče etaž lahko spreminja po višini konstrukcije in zato skalarna oblika ni več mogoča.

Geometrijska matrika konstrukcije $[G]$ je sestavljena povsem analogno, le da

namesto diagonalnih masnih matrik $[m]$ upoštevamo tridiagonalne geometrijske matrike $[g]$.

Podane matrike veljajo za splošne prostorske konstrukcije. Pri konstrukcijah, ki so simetrične glede na dve osi, lahko izberemo tak koordinatni sistem, da so vse izvendiagonalne podmatrike enake nič in celoten sistem enačb (n. pr. (2.1) razpade na tri neodvisne sisteme enačb reda n (n = število etaž), od katerih lahko rešujemo vsakega zase. Take konstrukcije imenujemo ravninske. Program vsebuje kot poseben primer tudi možnost ravninskega obravnavanja konstrukcije za upogib, pri čemer upošteva le levo zgornjo podmatriko.

V splošnih enačbah nastopa tudi matrika dušenja $[c]$. Pri metodi reševanja sistema enačb, ki jo uporablja program, te matrike ni potrebno poznati. Podrobnosti o upoštevanju dušenja so pokazane v poglavju o reševanju sistemov enačb.

Glede na uporabljene predpostavke je obtežba omejena na koncentrirano obtežbo v horizontalni smeri, ki deluje v višinah posameznih etaž (vertikalna obtežba ni osnovna obtežba, pač pa služi samo za določanje geometrijske matrike pri računu stabilnosti in upoštevanju teorije drugega reda). Ustrezno zgradbi matrik grupiramo horizontalno obtežbo v vektor zunanje obtežbe tako, da združimo vse sile v X smeri, vse sile v Y smeri in vse torzijske momente:

$$\{P\}^T = \left\{ \{P_x\}^T, \{P_y\}^T, \{P_\varphi\}^T \right\} = \{P_{x1}, P_{x2} \dots P_{\varphi n}\}.$$

Prijemališče vseh sil je na z osi konstrukcije ($x = y = 0$). Pri ravninskih konstrukcijah se omejimo samo na prvi podvektor $\{P_x\}$.

Podobno kot vektor zunanje obtežbe konstruiramo tudi vektor neznanih premikov

$$\{U\}^T = \left\{ \{U_x\}^T, \{U_y\}^T, \{U_\varphi\}^T \right\} = \{U_{x1}, U_{x2} \dots U_{\varphi n}\}.$$

Pri dinamičnih problemih sta vektorja zunanje obtežbe in premikov odvisna od časa.

Elastično vpetost celotne konstrukcije je možno upoštevati po istem principu kot elastično vpetost elementov (Podrobnosti glej v [3]). Tudi tu je, podobno kot pri elementih, mišljena elastična vpetost konstrukcije kot celote (n. pr.

vpetost v togo temeljno ploščo, ki se lahko zasuka, ali vpetost v kletno etažo). Elastične vpetosti konstrukcije zaenkrat v programu EAVEK ni mogoče upoštevati.

6. SISTEM ENAČB PRI SEIZMIČNI OBTEŽBI

Pri potresih pride do premikanja temeljnih tal, kar povzroči nihanje konstrukcije. Ker vemo, da so vztrajnostne sile odvisne od absolutnih, notranje pa od relativnih vrednosti premikov in ker predpostavimo, da so sile dušenja odvisne od relativnih premikov, lahko napišemo sistem diferencialnih enačb pri delovanju seizmične obtežbe v obliki

$$[M] \{\ddot{U}_a\} + [C] \{\dot{U}_r\} + [K] \{U_r\} = \{0\} , \quad \dots(6.1)$$

kjer je $\{U_a\}$ vektor absolutnih premikov, to je vsota premikov tal in relativnih premikov konstrukcije, $\{U_r\}$ pa vektor relativnih premikov konstrukcije. Namesto togostne matrike po teoriji 1. reda $[K]$ moramo pisati razliko $[K] - [G]$, če upoštevamo teorijo 2. reda.

Velja

$$\{U_a\} = \{U_r\} + \{U_t\} , \quad \dots(6.2)$$

kjer so z $\{U_t\}$ označeni premiki temeljnih tal. Z odvajanjem dobimo

$$\{\dot{U}_a\} = \{\dot{U}_r\} + \{\dot{U}_t\} \quad \dots(6.3)$$

in

$$\{\ddot{U}_a\} = \{\ddot{U}_r\} + \{\ddot{U}_t\} . \quad \dots(6.4)$$

S temi odnosi je možno enačbo (6.1) transformirati na dva načina in sicer v obliko

$$[M] \{\ddot{U}_r\} + [C] \{\dot{U}_r\} + [K] \{U_r\} = - [M] \{\ddot{U}_t\} \quad \dots(6.5)$$

ali v obliko

$$[M] \{\ddot{U}_a\} + [C] \{\dot{U}_a\} + [K] \{U_a\} = [C] \{\dot{U}_t\} + [K] \{U_t\} . \quad \dots(6.6)$$

Obakrat smo na desni zbrali znane količine - pospeške oziroma premike in hitrosti temeljnih tal. Desno stran si lahko predstavljamo kot fiktivno zunanjo obtežbo $\{P\}$ in na ta način smo sistem diferencialnih enačb (6.1) prevedli

na običajno obliko. Od obeh oblik enačbe nihanja pri potresni obtežbi se v praksi več uporablja enačba (6.5), ki je enostavnejša in ker so podatki največkrat podani v obliki akcelograma, ki predstavlja časovni potek pospeškov temeljnih tal.

Pospešek temeljnih tal ima pri potresu poljubno smer v prostoru, vendar se bomo v naših izvajanjih omejili na pospešek, ki deluje v horizontalni ravni.

Vektor $\{\ddot{u}_t\}$ pišemo v obliki produkta

$$\{\ddot{u}_t\} = k_c g \ddot{u}_t \{s\} \quad , \quad \dots(6.7)$$

kjer je g pospešek prostega pada, k_c razmerje med maksimalnim pospeškom temeljnih tal in pospeškom prostega pada, $\ddot{u}_t$ normiran potek pospeškov temeljnih tal in $\{s\}$ vektor, ki določa smer pospeškov. Red tega vektorja je enak številu prostostnih stopenj konstrukcije. Sestavimo ga iz podvektorjev, ki ustrezajo x , y in φ smeri. Kot primer podajamo vektorje $\{s\}$ za translatorno gibanje tal v x in y smeri ter pod kotom 45° in za rotacijo tal:

$$\{s\} = \begin{array}{cccc} x & y & xy(45^\circ) & \text{rotacija} \\ \left\{ \begin{array}{c} \{1\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{1\} \\ \{0\} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \{0.707\} \\ \{0.707\} \\ \{0\} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{0\} \\ \{1\} \end{array} \right\} \end{array} \quad \dots(6.8)$$

Red podvektorjev je enak številu etaž konstrukcije. Pri ravninskih konstrukcijah vektor $\{s\}$ degenerira v vektor $\{1\}$.

7. REŠEVANJE SISTEMOV ENAČB

Splošna enačba metode (2.1) predstavlja sistem linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Potem ko smo določili vse matrike konstrukcije in vektor zunanje obtežbe, ki je v splošnem odvisen od časa, lahko z rešitvijo sistema enačb izračunamo neznane premike $\{U\}$ v odvisnosti od časa.

Če zanemarimo posamezne vplive (enačbe (2.2) do (2.10)), se sistem enačb poenostavi. Pri statičnih problemih preidejo diferencialne enačbe v algebraične (enačbe (2.2) in (2.3)). Tudi pri uklonskih problemih in problemih lastnih nihanj lahko preidemo na sistem algebraičnih enačb, ki so homogene (enačbe (2.7) do (2.10)).

Pred opisom metod reševanja posameznih tipov sistemov enačb si oglejmo še značilnosti posameznih matrik:

- Vse matrike so simetrične.
- Togostna matrika je pozitivno definitna. Pri računu po teoriji 2. reda je vsota togostne in geometrijske matrike, ki predstavlja togostno matriko po teoriji 2. reda, pozitivno definitna. Isto velja tudi za togostne in podajnostne matrike elementov. Če program med računom javi, da matrika ni pozitivno definitna, je znak, da so podatki napačni.
- Masna matrika je praviloma pozitivno definitna, le če v računski shemi zanemarimo maso, ki pripada neki prostostni stopnji, je lahko singularna.
- Matrike dušanja, kot je bilo že omenjeno, pri računu ne potrebujemo v osnovni obliki. Predpostavimo le, da jo je možno transformirati v diagonalno obliko z isto transformacijo kot masno in togostno matriko (glej poglavje 7.4).

Simetrija matrik sledi iz zakona o recipročnosti, po katerem so premiki v točki i zaradi obtežbe v točki j enaki premikom v točki j zaradi obtežbe v točki i .

Pozitivno definitna je po definiciji tista simetrična matrika $[A]$, za katero velja

$$\{x\}^T [A] \{x\} > 0 \quad \dots(7.1)$$

za vsak od nič različen vektor $\{x\}$.

Deformacijska energija je enaka delu notranjih sil pri deformaciji konstrukcije.

$$U = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \quad \dots(7.2)$$

Deformacijska energija stabilne konstrukcije je pozitivna pri kakršnikoli deformaciji in iz primerjave enačb (7.1) in (7.2) sledi, da je togostna matrika $[K]$ pozitivno definitna. Podobno lahko s pomočjo kinetične energije

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\} \quad \dots(7.3)$$

ugotovimo, da je masna matrika pozitivno definitna, le v poenostavljenem primeru, ko mase, ki ustrezajo določeni prostostni stopnji, ne upoštevamo, postane matrika singularna.

7.1 Reševanje sistemov nehomogenih algebraičnih enačb

Pri statičnih problemih po teoriji 1. in 2. reda je potrebno rešiti sistem enačb oblike

$$[K] \{U\} = \{P\} \quad , \quad \dots(7.4)$$

kjer je $[K]$ simetrična pozitivno definitna matrika. Reševanje takega sistema enačb je obširno obdelano v literaturi. Z rešitvijo sistema enačb dobimo premike $\{U\}$.

7.2 Reševanje sistemov homogenih algebraičnih enačb - določanje lastnih vrednosti

Pri uklonskih problemih in problemih lastnih nihanj je potrebno rešiti sistem enačb oblike

$$[A] \{x\} = \lambda [B] \{x\} \quad , \quad \dots(7.5)$$

ki je v matematiki znan pod imenom posplošen problem lastnih vrednosti. Ker je vsaj ena od obeh matrik vedno pozitivno definitna (togostna matrika), je problem z dekompozicijo te matrike vedno možno prevesti na običajen problem lastnih vrednosti s simetrično matriko.

Če je pozitivno definitna matrika $[B]$, jo po Choleskem razbijemo na produkt dveh trikotnih matrik

$$[B] = [L] [L]^T, \quad \dots(7.6)$$

vstavimo v enačbo (7.5), množimo z leve z $[L]^{-1}$, množimo levo stran z enotno matriko

$$[I] = [L]^{-T} [L]^T \quad \dots(7.7)$$

in dobimo

$$[L]^{-1} [A] [L]^{-T} [L]^T \{x\} = \lambda [L]^{-1} [L] [L]^T \{x\} \quad \dots(7.8)$$

Če vpeljemo nov vektor

$$\{y\} = [L]^T \{x\} \quad \dots(7.9)$$

in novo matriko

$$[A'] = [L]^{-1} [A] [L]^{-T}, \quad \dots(7.10)$$

ki je očitvidno simetrična, smo problem prevedli na običajno obliko

$$[A'] \{y\} = \lambda \{y\} \quad \dots(7.11)$$

Povsem analogen je postopek, če je pozitivno definitna matrika $[A]$.

Reševanje problema lastnih vrednosti je obširno obdelano v literaturi. Rezultati so lastne vrednosti, iz katerih sledijo uklonske varnosti oziroma frekvence lastnega nihanja in lastni vektorji, ki predstavljajo uklonske oziroma nihajne oblike. Bistvena razlika med temi vrednostmi in premiki, ki jih izračunamo pri reševanju sistema nehomogenih enačb je v tem, da je tu določeno sa-

mo medsebojno razmerje posameznih premikov (oblika deformacijske linije), ne pa tudi njihove absolutne vrednosti.

Ker je matrika $[A']$ v enačbi (7.11) simetrična, so vse lastne vrednosti realne. Pri lastnih nihanjih lahko izračunamo le toliko lastnih vrednosti, kolikor je prostostnih stopenj s podanimi masami oziroma masnimi vztrajnostnimi momenti. Pri uklonskih problemih so lahko lastne vrednosti tudi negativne. Število pozitivnih lastnih vrednosti je odvisno od podane vertikalne obtežbe in je običajno enako številu prostostnih stopenj, pri katerih upoštevamo vpliv vertikalne obtežbe (vertikalna obtežba vpliva na vse etaže pod mestom prijemališča).

V praksi nas vedno zanima le omejeno število lastnih vrednosti, zato je program EAVEK omejen na račun največ devet lastnih vrednosti.

Bistvena lastnost lastnih vektorjev je njihova ortogonalnost, kar pomeni, da je produkt vektorja s samim seboj neka pozitivna vrednost, produkt dveh lastnih vektorjev, ki ustrezata različnim lastnim vrednostim, pa je vedno enak nič.

7.3 Reševanje sistemov homogenih diferencialnih enačb

Pri problemih lastnih nihanj je potrebno rešiti sistem enačb oblike

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{0\} \quad \dots(7.12)$$

Uporabimo nastavek

$$\{U\} = \{x\} \sin \omega t \quad , \quad \dots(7.13)$$

kjer je vektor $\{x\}$ neodvisen od časa, dvakrat odvajamo, vstavimo v osnovno enačbo in dobimo sistem homogenih algebraničnih enačb

$$[K] \{x\} = \omega^2 [M] \{x\} \quad , \quad \dots(7.14)$$

ki je obdelan v poglavju 7.2.

7.4 Reševanje sistemov nehomogenih diferencialnih enačb

Pri dinamični analizi je potrebno rešiti sistem diferencialnih enačb oblike

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{P\} \quad \dots(7.15)$$

Za reševanje takšnega sistema enačb je v programu uporabljena metoda transformacije v glavne koordinate, imenovana tudi modalna analiza, ki je podrobneje opisana v [6]. S to metodo prevedemo sistem odvisnih (vezanih) diferencialnih enačb v sistem neodvisnih (nevezanih) diferencialnih enačb, ki jih je mogoče rešiti vsako zase in pri tem zanemariti tiste enačbe, ki nimajo zaznavnega vpliva na obnašanje konstrukcije. Metoda predstavlja transformacijo problema v nov koordinatni sistem, v katerem postanejo vse matrike diagonalne, kar je pogoj za neodvisne enačbe. Če se odpovemo povsem splošni matriki dušenja $[C]$, kar zaradi pomanjkljivih podatkov o vrednostih koeficientov dušenja ne predstavlja nobene bistvene omejitve, potem se izkaže, da je železo transformacijo mogoče izvesti s pomočjo lastnih vektorjev, ki jih dobimo pri rešitvi posplošenega problema lastnih vrednosti (7.5).

Lastne vektorje združimo v matriko $[V]$, kjer predstavlja en lastni vektor en stolpec matrike. Zvezo med premiki $\{U\}$ v osnovnem koordinatnem sistemu in premiki $\{Y\}$ v novem koordinatnem sistemu (glavne koordinate) napišemo v obliki

$$\{U\} = [V] \{Y\} \quad \dots (7.16)$$

Enačbo (7.16) je možno napisati tudi v obliki

$$\{U\} = \sum_{j=1}^n \{v_j\} y_j \quad \dots(7.17)$$

kjer so $\{v_j\}$ stolpci matrike $[V]$ (lastni vektorji) in y_j koeficienti vektorja $\{Y\}$ (premiki v novem koordinatnem sistemu). Število prostostnih stopenj je označeno z n . Iz enačbe (7.17) je razviden fizikalni pomen transformacije: dejanske premike $\{U\}$ izrazimo kot linearno kombinacijo premikov za posamezne nihajne oblike $\{v_j\}$. Pri tem so y_j amplitude, odvisne od časa.

Na tem mestu je možno uvesti aproksimacijo

$$\{U\} = \sum_{j=1}^m \{v_j\} y_j \quad m \ll n \quad \dots(7.18)$$

Na ta način upoštevamo le vpliv najpomembnejših nihajnih oblik, to je osnovne in nekaj višjih, vpliv ostalih pa zanemarimo in tako bistveno zmanjšamo računsko delo. Izbira števila m je odvisna predvsem od vrste obtežbe in deloma tudi od vrste konstrukcije. Večkrat je dosežena zadostna natančnost že, če upoštevamo samo osnovno nihajno obliko, to je $m = 1$. Pri aproksimaciji (7.18) matrika $[V]$ ni več kvadratna, pač pa ima m stolpcev in n vrstic.

Zdaj se vrnimo k naši osnovni nalogi – transformaciji sistema (7.15).

Enačbo (7.16) vstavimo v enačbo (7.15), množimo z leve z $[V]^T$ in dobimo

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{P\} \quad \dots(7.19)$$

Velja

$$[M] = [V]^T [M] [V] \quad \dots(7.20)$$

$$[C] = [V]^T [C] [V] \quad \dots(7.21)$$

$$[K] = [V]^T [K] [V] \quad \dots(7.22)$$

$$\{P\} = [V]^T \{P\} \quad \dots(7.23)$$

Matriki $[M]$ in $[K]$ sta zaradi ortogonalnosti lastnih vektorjev diagonalni, za matriko dušenja predpostavimo, da jo je možno diagonalizirati z isto transformacijo kot masno in togostno matriko. Sistem enačb (7.19) je sistem neodvisnih (nevezanih) enačb, od katerih ima vsaka obliko

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = p \quad \dots(7.24)$$

Vsaka taka enačba ustreza eni nihajni obliki, njihovo število pa je enako številu stolpcev v matriki $[V]$. Z m , c , k , p in y so označeni koeficienti matrik in vektorjev v enačbi (7.19).

Medtem ko dobimo vrednosti m , k in p po transformacijah (7.20), (7.22) in (7.23), določimo koeficiente dušenja c največkrat kar neposredno z izrazom

$$c = 2 \zeta \omega m \quad , \quad \dots(7.25)$$

kjer je ω frekvenca lastnega nihanja, ζ pa razmerje dejanskega in kritičnega dušenja za ustrezno nihajno obliko. Kritično dušenje je tisto dušenje, pri katerem gibanje ni več oscilativno in ne moremo več govoriti o nihanju. Pri gradbenih konstrukcijah je dušenje vedno bistveno manjše od kritičnega dušenja in vrednosti ζ so običajno v območju pod 0.10. Opisan način določanja koeficientov dušenja je najbolj pogost, saj je zelo enostaven in ker obstaja vsaj nekaj eksperimentalnih podatkov o numerični vrednosti koeficienta ζ . Matrike dušenja v osnovnem koordinatnem sistemu $[C]$ pri tej metodi ni potrebno poznati.

Naša naslednja naloga je rešitev enačb oblike (7.24). Desna stran enačbe je poljubna funkcija časa in samo v izjemnih primerih je možno najti analitično rešitev. Splošno rešitev enačbe ob predpostavki, da sta začetna hitrost in začetni pomik enaka nič, predstavlja tako imenovan Duhamelov integral

$$y(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t e^{-\zeta \omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega_d(t-\tau) \cdot p(\tau) d\tau \quad , \quad \dots(7.26)$$

kjer je τ integracijska spremenljivka, t čas, v katerem računamo premik y , m in p koeficienta v enačbi (7.24) (p je spremenljiv s časom), ζ koeficient v enačbi (7.25), ω_d pa lastna frekvenca dušenega nihanja, ki jo izračunamo po enačbi

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad . \quad \dots(7.27)$$

Zaradi majhnih vrednosti koeficienta ζ se pri gradbenih konstrukcijah frekvenca dušenega nihanja le malo razlikuje od frekvence nedušenega nihanja.

Duhamelov integral je možno analitično rešiti le, če je obtežba p podana analitično kot funkcija časa in če je ta funkcija dovolj enostavna. Pri reševanju praktičnih problemov sta ta dva pogoja le redko izpolnjena. Obtežba p pri potresni obremenitvi je linearno odvisna od poteka pospeškov temeljnih tal (glej enačbo (6.5)), ki je v splošnem izredno komplicirana funkcija. V primeru take obtežbe lahko obtežbo p razdelimo na manjše odseke in predpostavimo, da je potek obtežbe na odsekih linearen. Integral lahko zdaj izvrednotimo tako, da odsekoma analitično integriramo in rezultate seštejemo.

Ta način reševanja enačbe (7.24) je izbran v programu EAVEK. Prednost opisanega načina pred ostalimi numeričnimi metodami je v tem, da daje pri linearnem poteku obtežbe eksaktne rezultate, ne glede na dolžino odsekov, če izberemo za meje odsekov tiste točke, kjer nastopajo lomi pri poteku obtežbe. Predpostavka o linearnem poteku obtežbe po odsekih zaenkrat ne predstavlja nobene bistvene omejitve, saj so podatki običajno tako nenatančni, da ni smiselna nobena natančnejša predpostavka.

Izpeljava končnih enačb, uporabljenih v programu, je prikazana v [4].

Z rešitvijo Duhamelovega integrala izračunamo premike konstrukcije v poljubno izbranih časih in za poljubno število nihajnih oblik, vendar v novem koordinatnem sistemu. Za določitev dejanskih premikov moramo dobljene vrednosti še transformirati v osnovni koordinatni sistem po enačbi (7.16) oziroma po enačbi (7.18).

V dinamiki konstrukcij pogosto uporabljamo izraz odziv konstrukcije pri določeni dinamični obtežbi. S tem izrazom lahko zajamemo katerokoli količino (premik, hitrost, pospešek, notranje sile), ki se pojavi v konstrukciji kot posledica dinamične obtežbe. Z opisano metodo izračunamo n. pr. odziv (premike) konstrukcije v času t , s ponavljanjem računa za različne čase t pa lahko določimo časovni potek odziva (premikov). Ko poznamo premike, je možno izračunati vse ostale količine, ki nas zanimajo (glej poglavje o notranjih silah).

7.5 Uporaba spektrov odziva

Pri dimenzioniranju konstrukcij nas praviloma zanimajo le najneugodnejši primeri. Za dinamično obteženo konstrukcijo z eno prostorsko stopnjo moramo n. pr. poznati maksimalni premik, le redko pa nas zanima tudi celoten časovni potek premika. V takem primeru lahko uporabimo metodo s spektrom odziva. Spekter odziva ("response spectrum") predstavlja maksimalni odziv idealizirane konstrukcije - sistema z eno prostostno stopnjo - pri podani dinamični obtežbi. Točko v spektru dobimo tako, da kot absciso upoštevamo frekvenco ali nihajno dobo idealizirane konstrukcije, kot ordinato pa maksimalni odziv. Če ta postopek ponavljamo za različne lastne frekvence in različne koeficiente dušenja, lahko konstruiramo serijo krivulj, ki jih imenujemo spekter odziva.

Priprava spektrov odziva je zamudna, saj je potrebno računati celoten časovni potek odziva za razne obtežbe p , za razne frekvence ω in za razne koeficiente dušenja ζ . To delo je le enkratno, pri znanih spektrih pa je nadaljnji račun zelo enostaven. Za analizo konstrukcije z eno prostostno stopnjo je potrebno izračunati nihajno dobo lastnega nihanja in v spektru, ki ustreza dejanski dinamični obtežbi, odčitati eksaktno vrednost odziva v odvisnosti od koeficienta dušenja.

Pri konstrukcijah z več prostostnimi stopnjami je potrebno sistem odvisnih diferencialnih enačb najprej transformirati v glavne koordinate in ga s tem prevesti v sistem neodvisnih diferencialnih enačb. Vsaka od teh enačb ustreza neki fiktivni konstrukciji z eno prostostno stopnjo in z lastno frekvenco, ki je enaka eni od lastnih frekvenc dejanske konstrukcije. Ob predpostavki, da velja teorija elastičnosti, je možno zdaj za vsako od teh fiktivnih konstrukcij odčitati iz spektra maksimalno vrednost odziva ter nato s superpozicijo izračunati maksimalni odziv celotne konstrukcije, saj so po enačbi (7.16) dejanski premiki izraženi kot linearna kombinacija premikov za posamezne nihajne oblike.

Pri superpoziciji pride do izraza glavna pomanjkljivost metode računa s spektri odziva. Pri pripravi spektrov je bila izgubljena dimenzija, ki je značilna za dinamiko in to je čas. V spektrih so zbrani samo podatki o maksimalnih vrednostih odziva, manjkajo pa podatki o tem, kdaj časovno se te vrednosti pojavijo, zato točne vrednosti odziva konstrukcije z več prostostnimi stopnjami ni mogoče izračunati.

Zgornjo mejo odziva dejanske konstrukcije predstavlja aritmetična vsota vseh maksimalnih vrednosti za posamezne nihajne oblike (za posamezne fiktivne konstrukcije)

$$S = \sum_{j=1}^n |S_j| \quad , \quad \dots (7.28)$$

kjer je S_j označena maksimalna vrednost odziva za j -to nihajno obliko. Ta vsota bi ustrezala dejanski vrednosti, če bi se vsi maksimalni odzivi pojavili v istem trenutku z istim predznakom. Kot spodnja meja se običajno upošteva kar maksimalna od vseh vrednosti za posamezne nihajne oblike, torej

$$S = \max (S_j) \quad j = 1 \dots n \quad . \quad \dots (7.29)$$

Verjetna vrednost leži nekje med obema mejama. V literaturi je najbolj razširjena enačba

$$s = \sqrt{\sum s_j^2} \quad , \quad \dots(7.30)$$

medtem ko je v veljavnih jugoslovanskih predpisih o gradnji na seizmičnih področjih podana enačba

$$s = \sqrt{\max (s_j)^2 + 0.5 \sum \text{ostali } (s_j)^2} \quad , \quad \dots(7.31)$$

kjer je treba sešteti vse s_j razen maksimalnega, ki je upoštevan v prvem sumandu.

Zadnji dve enačbi sta uporabljeni v programu EAVEK. Enačba (7.1) se uporablja pri računu po veljavnih (= starih) jugoslovanskih predpisih, enačba (7.30) pa pri računu s podanim spektrom in pri računu po novih jug. predpisih.

Na tem mestu naj opozorimo, da je potrebno kombinirati vplive posameznih nihajnih oblik za vsako količino posebej, ne pa samo za eno količino (n. pr. za premike) in nato s pomočjo tako dobljenih vrednosti računati ostale količine (n. pr. notranje sile).

Metodo s spektri odziva je v principu možno uporabiti pri poljubni dinamični obtežbi, najbolj pogosto pa se uporablja pri seizmični obtežbi. Uporaba metode v programu EAVEK je omejena le na seizmično obtežbo in v nadaljnjem bodo prikazane uporabljene enačbe.

Izhajali bomo iz enačbe (7.26), v katero bomo morali vstaviti izraze za m in p . Izraz za račun koeficientov diagonalne masne matrike v glavnih koordinatah sledi iz enačbe (7.20)

$$m_j = \{v_j\}^T [M] \{v_j\} \quad . \quad \dots(7.32)$$

Indeks j se nanaša na nihajno obliko.

Izraz za koeficiente vektorja zunanje obtežbe sledi iz enačbe (7.23). Pri tem upoštevamo fiktivno zunanjo obtežbo po enačbi (6.5) in enačbo (6.7)

$$\{p_j\} = \{v_j\}^T \{P\} = - \{v_j\}^T [M] \{\ddot{u}_t\} = - \{v_j\}^T [M] k_c g \ddot{u}_t \{s\} \quad . \quad \dots(7.33)$$

Točka v spektru odziva po definiciji predstavlja maksimalni odziv konstrukcije z eno prostostno stopnjo. Pri eni prostostni stopnji se enačba (7.33) poenostavi

$$p = -m k_c g \ddot{u}_t \quad \dots(7.34)$$

Če izraz (7.34) vstavimo v enačbo (7.26), jo izvednostimo kot funkcijo časa t in poiščemo njeno maksimalno vrednost, potem ta maksimalna vrednost predstavlja točko v spektru relativnih premikov

$$S_d = \frac{1}{\omega} \max \left| \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) \cdot k_c g \ddot{u}_t(\tau) d\tau \right| \quad \dots(7.35)$$

V izrazu (7.35) je upoštevano, da je pri gradbenih konstrukcijah zelo majhna razlika med frekvencama dušenega in nedušenega nihanja

$$\omega \cong \omega_d \quad \dots(7.36)$$

in da predznak premika ni pomemben, saj smer pospeška temeljnih tal ni definirana.

Spekter relativnih premikov S_d je povezan s spektrom relativnih hitrosti S_v in s spektrom absolutnih pospeškov S_a s približnima enačbama:

$$S_v = \omega S_d \quad \text{in} \quad S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d \quad \dots(7.37)$$

Nadalje uvedemo še tako imenovan faktor participacije, ki numerično pokaže vpliv posameznih nihajnih oblik. Faktor definiramo z izrazom

$$\Gamma_j = \frac{\{v_j\}^T [M] \{s\}}{\{v_j\}^T [M] \{v_j\}} \quad \dots(7.38)$$

Enačbe (7.32), (7.33) in (7.35) do (7.38) vstavimo v enačbo (7.26) in dobimo izraz za maksimalno vrednost premika

$$y_{j\max} = \frac{S_{aj}}{\omega_j^2} \Gamma_j \quad \dots(7.39)$$

kjer indeks j predstavlja nihajno obliko.

Premike transformiramo v osnovni koordinatni sistem po enačbi (7.18), torej velja za doprinos j -te nihajne oblike

$$\{U_j\} = \{v_j\} y_j = \{v_j\} \frac{S_{aj}}{\omega_j^2} \Gamma_j \quad \dots(7.40)$$

Opisani postopek ponovimo za m nihajnih oblik, ki jih upoštevamo pri računu, nato pa izračunane vrednosti kombiniramo po eni izmed enačb od (7.28) do (7.31). Enačbi (7.30) in (7.40) sta uporabljeni v programu EAVEK pri računu z metodo spektrov.

V jugoslovanskih predpisih je spekter pospeškov podan kot produkt več faktorjev in sicer velja po obstoječih (= starih) predpisih

$$S_a = k_c \beta g \quad \dots(7.41a)$$

po novih pa

$$S_a = K_o K_s K_d K_p K_\eta g \quad \dots(7.41b)$$

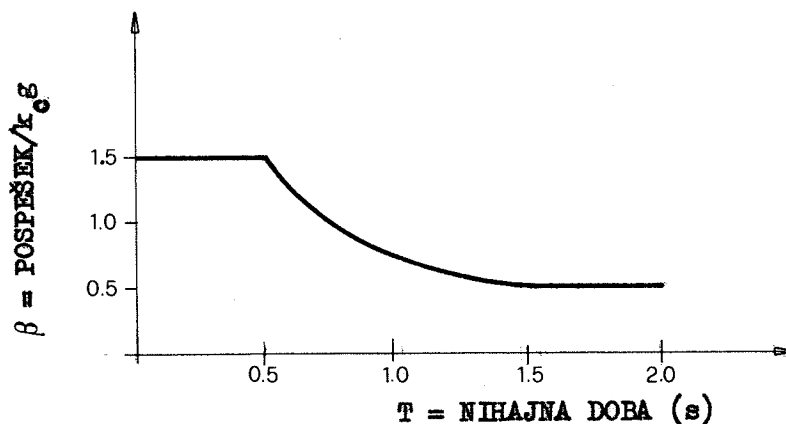
Koeficientu seizmičnosti k_c v starih predpisih ustreza koeficient K_s v novih predpisih, koeficientu dinamičnosti β v starih predpisih pa koeficient K_d v novih predpisih. Koeficient pomembnosti objekta K_o je v starih predpisih zajet v določilu o spremembi potresne cone, torej v koeficientu k_c . Celoten spekter, izračunan tako po starih kot po novih predpisih, je zmanjšan zaradi ugodnega vpliva plastifikacije materiala in sicer je to zmanjšanje zajeto v sorazmerno majhnih koeficientih seizmičnosti k_c oziroma K_s . V starih predpisih je zmanjšanje enako za vse tipe konstrukcij in materialov, v novih predpisih pa je zmanjšanje odvisno od tipa konstrukcije in od materiala (koeficient plastičnosti in dušenja K_p). K_η je koeficient, ki upošteva vpliv bistvene razlike v načinu računa po starih in novih predpisih. Stari predpisi izhajajo iz teorije dinamike konstrukcij in določajo neposredno potresne sile po etažah. Vsota vseh potresnih sil, ki je enaka prečni sili na mestu vpetja objekta, je pri takem načinu računa odvisna od nihajne oblike konstrukcij. Novi predpisi določajo neposredno vsoto vseh potresnih sil. Koeficienta K_η ni v predpisih, vendar ga moramo uvesti pri teoretičnem izvajanju, če hočemo spraviti stare in nove predpise na skupni imenovalec. Vrednost koeficienta K_η je pri običajnih konstrukcijah vedno

večja od 1, doseže pa lahko tudi 1.6.

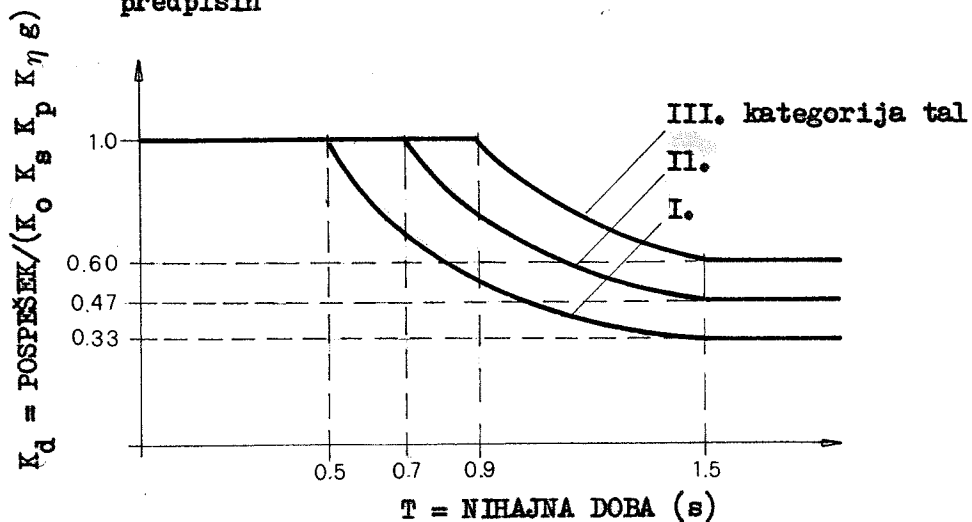
Koeficienta β oziroma K_d predstavljata brezdimenzijski normirani spekter pospeškov po starih predpisih (slika 7.1a) in po novih predpisih (slika 7.1b), saj velja

$$\beta = \frac{S_a}{k_c g} \quad \text{oziroma} \quad K_d = \frac{S_a}{K_o K_s K_p K_\eta g} \quad \dots(7.41c)$$

Zaradi pomanjkljivih podatkov o pospeških temeljnih tal pri potresih, o koeficientih dušenja in o vplivu plastifikacije materiala so predpisani zelo enostavni spektri.



Slika 7.1a. Spekter normiranih pospeškov β po starih jugoslovanskih predpisih



Slika 7.1b. Spekter normiranih pospeškov K_d po novih jugoslovanskih predpisih

V nadaljnjem tekstu bomo uporabljali oznake iz starih predpisov, vendar vsa izvajanja veljajo tudi za nove predpise, če upoštevamo $\beta = K_d$ in

$$k_c = K_o K_s K_p K_\eta.$$

Ob upoštevanju brezdimenzionalnega spektra β se enačba (7.40) glasi

$$\{U_j\} = \frac{k_c \varepsilon \beta_j}{\omega_j^2} \Gamma_j \{v_j\} \quad \dots(7.42)$$

Ta enačba je uporabljena v programu EAVEK pri računu z metodo spektrov po jugoslovanskih predpisih. Pri tem je za kombinacijo vpliva različnih nihajnih oblik uporabljena enačba (7.31) pri starih in enačba (7.30) pri novih predpisih.

Na podlagi znanih premikov je vedno možno izračunati notranje sile, vendar je v praksi bolj običajno določanje notranjih sil, če je znana zunanja obtežba. Naša naloga je torej, da določimo tisto zunanjo obtežbo, ki bo povzročila enake notranje sile kot izračunani premiki, če bomo uporabili analizo po teoriji 1. reda. Očitno dobimo tako ekvivalentno zunanjo obtežbo s produktom

$$\{P_{ej}\} = [K] \{U_j\} \quad \dots(7.43)$$

Iz enačbe je razvidno, da so premiki zaradi ekvivalentne obtežbe, izračunani po statični teoriji 1. reda, ravno enaki dejanskim premikom, to pa pomeni, da je možno po določitvi ekvivalentne obtežbe uporabiti v nadaljnjem računu vse običajne statične metode.

Masna matrika je običajno enostavnejša od togostne, zato pogosto uporabljamo drug način določanja ekvivalentne obtežbe. Če ne upoštevamo vpliva teorije 2. reda in zanemarimo vpliv dušenja, potem lahko upoštevamo enačbo (2.8) in pišemo

$$\{P_{ej}\} = \omega_j^2 [M] \{U_j\} \quad \dots(7.44)$$

Če zdaj vstavimo v to enačbo izraz (7.42), dobimo končno enačbo za ekvivalentno obtežbo, ki jo imenujemo tudi seizmična obtežba

$$\{P_{ej}\} = k_c \varepsilon \beta_j \Gamma_j [M] \{v_j\} \quad \dots(7.45)$$

V jugoslovanskih predpisih je podana enostavnejša enačba za račun potresne obtežbe, ki je uporabna samo ob predpostavki, da je konstrukcija ravninska in masna matrika diagonalna. Ob upoštevanju teh poenostavitev lahko pišemo faktor participacije v obliki

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n M_i v_{ij}}{\sum_{i=1}^n M_i v_{ij} / 2} \quad \dots(7.46)$$

kjer so M_i koncentrirane mase v posameznih etažah (diagonalni koeficient osnovne masne matrike) in v_{ij} koeficienti vektorja $\{v_j\}$. Nadalje označimo

$$\eta_{ij} = v_{ij} \Gamma_j$$

$$Q_i = g M_i$$

in enačba za seizmično silo v etaži i za nihajno obliko j se glasi

$$P_{eij} = S_{ij} = k_c \beta_j \eta_{ij} Q_i \quad \dots(7.47)$$

Ta enačba je podana v starih predpisih. Po novih predpisih izračunamo skupno seizmično silo, ki je enaka vsoti potresnih sil po etažah z enačbo

$$S = K_o K_s K_d K_p Q \quad \dots(7.48)$$

kjer je Q teža celotnega objekta.

To silo nato razdelimo po posameznih etažah po približni enačbi v predpisih ali po enačbi (7.45), kjer moramo namesto koeficientov iz starih predpisov upoštevati nove koeficiente

$$k_c \beta = K_o K_s K_d K_p K_\eta$$

Produkt koeficientov $K_o K_s K_p$ je podatek, K_d izračuna program v odvisnosti od nihajnega časa in kategorije tal, K_η pa na podlagi pogoja, da mora biti celotna prečna sila v spodnji etaži konstrukcije enaka sili po enačbi (7.48).

8. DOLOČITEV NOTRANJIH SIL

V poglavju o reševanju sistemov enačb so bile opisane metode za določitev premikov konstrukcije. Premiki se nanašajo na koordinatno izhodišče. Pri znanih premikih konstrukcije je zaradi predpostavke o togih medetažnih ploščah možno določiti premike vseh nosilnih elementov po enačbah (glej [3], [4])

$$u_x = U_x \cos \alpha + U_y \sin \alpha + U_\varphi (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \quad \dots (8.1)$$

$$u_\varphi = U_\varphi$$

Enačbi veljata za vsako etažo. Z u_x je označen pomik izhodišča lokalnega koordinatnega sistema upogibnega elementa in u_φ je zasuk torzijskega elementa. U_x , U_y in U_φ so pomika in zasuk konstrukcije, x in y sta koordinati izhodišča lokalnega koordinatnega sistema in α je kot med globalno X osjo in nosilno smerjo elementa.

Na podlagi znanih premikov elementa je mogoče neposredno izračunati notranje sile v elementih. V programu EAVEK je zaradi numeričnih in programskih razlogov izbrana druga, posredna možnost z uporabo tako imenovane ekvivalentne obtežbe. Ta obtežba je definirana z enačbo

$$\{p_e\} = [k] \{u\} \quad \dots (8.2)$$

kjer so $\{u\}$ dejanski pomiki elementa (pomiki za upogibne oziroma zasuki za torzijske elemente), $[k]$ togostna matrika elementa po teoriji 1. reda in $\{p_e\}$ ekvivalentna obtežba (sile za upogibne in torzijski momenti za torzijske elemente). Iz enačbe je razvidno, da je ekvivalentna obtežba tista fiktivna obtežba, ki bi po statični teoriji 1. reda povzročila dejanske premike. Samo v primeru, ko je bila za analizo konstrukcije uporabljena statična teorija 1. reda, se ekvivalentna obtežba ujema z dejansko obtežbo, ki odpada na element. Za dejansko obtežbo velja ravnotežni pogoj, da mora biti vsota obtežb posameznih elementov enaka zunanji obtežbi konstrukcije, za ekvivalentno obtežbo pa ta pogoj ne velja več. Pri ekvivalentni obtežbi so v najbolj splošnem primeru zajete tudi vztrajnostne sile, sile dušenja in vpliv teorije 2. reda, kar je razvidno iz primerjave med enačbo (8.2) in enačbo (2.1), ki jo pišemo v obliki

$$[K] \{U\} = \{P\} - [M] \{\ddot{U}\} - [C] \{\dot{U}\} + [G] \{U\} \quad \dots(8.3)$$

Celotna desna stran enačbe predstavlja ekvivalentno obtežbo.

Ko poznamo ekvivalentno obtežbo, lahko za račun notranjih sil uporabimo vse običajne statične metode. Enačbe za določanje notranjih sil posameznih tipov elementov so podane v poglavju o elementih.

Pri elastično vpetih elementih je treba upoštevati, da povzročajo notranje sile samo tisti premiki, ki ustrezajo togo vpeti konstrukciji, medtem ko so dodatni premiki zaradi elastične vpetosti elementa premiki togega telesa in nimajo vpliva na notranje sile. Pri metodi z ekvivalentno obtežbo je zato v primeru elastične vpetosti treba upoštevati togostno matriko $[k]$, ki ustreza togo vpetemu elementu.

9. Približne metode

Za reševanje posameznih problemov s področja analize konstrukcij je znanih nekaj enostavnih približnih metod, s katerimi je možno večkrat dovolj natančno oceniti posamezne vplive. Na tem mestu bomo podali približne enačbe za račun vpliva teorije 2. reda pri statični in dinamični obtežbi ter za račun vpliva elastične vpetosti pri nihanju konstrukcije. Vse tri enačbe temeljijo na predpostavki, da se oblika premikov (deformacijska linija) pri upoštevanju dodatnega vpliva ne spremeni. Ta predpostavka je običajno ustrezna za ravninske konstrukcije in za osnovne nihajne oblike, medtem ko je bolj problematična za prostorske konstrukcije in največkrat neuporabna za višje nihajne oblike.

Približna enačba za račun premikov po teoriji 2. reda se glasi

$$u_2 = u_1 \frac{1}{1 - P/P_{kr}} \quad ,$$

kjer se indeksa 1 in 2 nanašata na teorijo 1. in 2. reda, P/P_{kr} pa predstavlja razmerje med dejansko in kritično uklonsko obtežbo. Enačba temelji na predpostavki, da je oblika deformacijskih linij pri računu po teoriji 1. reda, pri računu po teoriji 2. reda in pri uklonu enaka. Raziskave so poazale, da daje enačba zelo dobre rezultate pri ravninskih konstrukcijah. Za prostorske konstrukcije je običajno manj natančna. Uporabiti jo je treba za premike v vsaki smeri posebej in kot kritično uklonsko silo upoštevati tisto silo, ki povzroči izklon pretežno v iskani smeri.

Približna enačba za račun vpliva vertikalne obtežbe pri nihanju se glasi

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 (1 - P/P_{kr}) \quad ,$$

kjer je ω označena frekvenca lastnega nihanja, indeksa 1 in 2 pa se spet nanašata na teorijo 1. in 2. reda. Enačba temelji na predpostavki, da je oblika deformacijskih linij pri lastnem nihanju po teoriji 1. reda, pri lastnem nihanju po teoriji 2. reda in pri uklonu enaka. Spet je natančnost največja pri osnovni nihajni obliki ravninske konstrukcije.

Enačba za izračun frekvence lastnega nihanja elastično vpete konstrukcije se glasi

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_T^2} + \frac{1}{\omega_E^2} \quad ,$$

kjer se indeks T nanaša na elastično vpeto tego konstrukcijo in indeks E na tego vpeto elastično konstrukcijo (glej sliko o elastični vpetosti elementov). Enačba temelji na predpostavki, da je oblika deformacijskih linij pri vseh treh primerih nihanj (ω , ω_T , ω_E) enaka, kar je običajno približno izpolnjeno za osnovno nihajno obliko ravninskih konstrukcij.

10. LITERATURA

- [1] M. Bratović, Analiza horizontalno obteženih večnadstropnih sten z enim ali več nizi odprtih na togi ali elastični podlagi. V. kongres jugoslovanskega društva gradbenih konstrukterjev in 3. kongres jugoslovanskega društva za seizmično gradbeništvo, Budva 1974, Referat A - 6.
- [2] I.A.S. Elkholy, H. Robinson, Analysis of Multi - Bay Coupled Shear Walls. Building Science 8, 153 - 157, 1973.
- [3] P. Fajfar, Analiza horizontalno obteženih nesimetričnih večnadstropnih konstrukcij. Publikacija RC FAGG št. 1, Univerza v Ljubljani 1972.
- [4] P. Fajfar, Numerična obdelava statičnih, dinamičnih in stabilnostnih problemov za večetažne konstrukcije. Disertacija, FAGG, Univerza v Ljubljani, 1973.
- [5] P. Fajfar, Statika, dinamika in stabilnost večetažnih objektov. Publikacija RC FAGG št. 3, Univerza v Ljubljani, 1974.
- [6] P. Fajfar, Račun konstrukcij pri seizmični obtežbi. Gradbeni vestnik 24, 1975/1.
- [7] P. Fajfar, Numerična analiza večetažnih objektov. Gradbeni vestnik 23, 1974/8-9.
- [8] P. Fajfar, Statika, dinamika in stabilnost objektov v visokogradnji. V. kongres jugoslovanskega društva gradbenih konstrukterjev in 3. kongres jugoslovanskega društva za seizmično gradbeništvo, Budva 1974, Referat A- 12.